. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di laurea (DIV, FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica I o Calcolo I | 16 dicembre 2004

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Calcolare i limiti $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3x^2}\right)$ $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x-3\sin x}$ e $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{x/2}$

SOLUZIONE. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3x^2}$, il primo limite richiesto diventa

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1-3x^2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2(1-1/x^2)}+\sqrt{3x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-1}{|x|\left(\sqrt{1-1/x^2}+\sqrt{3}\right)}=+\infty.$$

Dividendo numeratore e denominatore per x, il secondo limite diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+(\sin x)/x}{1-3(\sin x)/x}=\frac{1+1}{1-3}=1$$

(si è usato il limite notevole relativo alla funzione $(\sin x)/x$).
Moltiplicando e dividendo l'esponente per 5 e ponendo quindi $y=x/5$, il terzo limite diventa

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{(x/5)(5/2)}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y(5/2)}=e^{5/2}$$

(si è usato il limite notevole relativo alla funzione $(1+1/y)^y$).

---

2. Studiare la funzione reale di variabile reale $f(x)=\left|\frac{\log x}{1+\log x}\right|$ e disegnarne il grafico (è richiesto anche lo studio della convessità; esprimere il campo di esistenza mediante intervalli o semirette, oppure loro unioni).

SOLUZIONE. Il campo di esistenza è costituito da $]0,1/e[\cup]1/e,+\infty[$. Lo studio di funzione può essere condotto direttamente, ma si semplifica se si pone

$$g(x)=\frac{\log x}{1+\log x}\qquad\text{e si osserva che}\qquad g(x)=1-\frac{1}{1+\log x}\ .$$

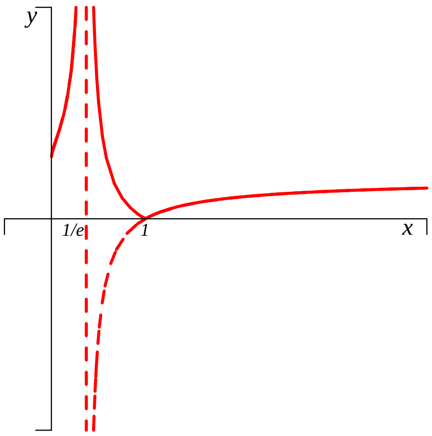
La funzione g si annulla solo per $x=1$. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=1=\lim_{x\to0^+}g(x),\qquad\lim_{x\to(1/e)^-}g(x)=+\infty,\qquad\lim_{x\to(1/e)^+}g(x)=-\infty.$$

La derivata esiste in tutti i punti del campo di esistenza e vale

$$g'(x)=\frac{1}{x(1+\log x)^2}\ :$$

evidentemente, g' è strettamente positiva per ogni x, dunque g è strettamente crescente e non vi sono punti di massimo o minimo assoluto o relativo.



La derivata seconda di g esiste in tutti i punti del campo di esistenza e vale

$$g''(x) = -\frac{3 + \log x}{x^2(1 + \log x)^3} \ .$$

Risulta $g''(x) > 0$ (e dunque g è convessa) in $]0, 1/e^3[$, mentre $f''(x) < 0$ (e dunque f è concava) in $]1/e^3, 1/e[$ e in $]1/e, +\infty[$. Il grafico di g è riportato in figura (nell'intervallo $]1/e, 1[$ va presa la linea tratteggiata). Poiché $f = |g|$, il suo grafico è ottenuto da quello di g per simmetria rispetto all'asse x dei tratti corrispondenti a $g < 0$: si ottiene la linea continua della figura.
Si osservi che l'operazione di simmetria genera un punto di tipo angoloso in $x = 1$, ove si trova anche il minimo assoluto di f. Inoltre, anche la monotonia e la convessità sono modificate: nell'intervallo $]1/e, 1[$ la funzione f è decrescente e convessa.

---

3. Calcolare gli integrali $\displaystyle\int e^x \log(1 + e^x)\, dx$ e $\displaystyle\int_0^\pi x^3 \sin x\, dx$

SOLUZIONE. Nel primo integrale si applica la sostituzione $y = 1 + e^x$ (da cui $dy = e^x dx$) e quindi si integra per parti come segue

$$\int e^x \log(1 + e^x)\, dx = \int \log y\, dy = y \log y - \int y \frac{1}{y}\, dy = y \log y - y + C = (1 + e^x) \log(1 + e^x) - (1 + e^x) + C.$$

Il secondo si risolve integrando per parti tre volte:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^3 \sin x\, dx &= \Big[-x^3 \cos x\Big]_0^\pi + 3\int_0^\pi x^2 \cos x\, dx = \Big[-x^3 \cos x\Big]_0^\pi + 3\Big[x^2 \sin x\Big]_0^\pi - 6\int_0^\pi x \sin x\, dx = \\ &= \Big[-x^3 \cos x\Big]_0^\pi + 3\Big[x^2 \sin x\Big]_0^\pi - 6\Big[-x \cos x\Big]_0^\pi - 6\int_0^\pi \cos x\, dx = \\ &= \Big[-x^3 \cos x\Big]_0^\pi + 3\Big[x^2 \sin x\Big]_0^\pi - 6\Big[-x \cos x\Big]_0^\pi - 6\Big[\sin x\Big]_0^\pi = \pi^3 - 6\pi.\end{aligned}$$