PROVA SCRITTA DI CALCOLO I. 22 marzo 2005.

....

Cognome e nome   firma   Corso di laurea

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x^2)}{1-\cos x} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{4\arcsin x}{5x}$$

2. Studiare la seguente funzione reale di variabile reale e tracciarne il grafico

$$f(x) = e^x \left(x^2 + 2x - 3\right).$$

   Determinare l'equazione cartesiana della retta tangente al grafico della funzione nell'origine.

3. Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}\, dx \qquad\qquad \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(\log x)}{x}\, dx$$

SOLUZIONE

1. Il primo limite può essere riscritto nel modo seguente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x^2)}{3x^2} \frac{3x^2}{1-\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x^2)}{3x^2} \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x} = 6.$$

Nel secondo caso, ponendo $\arcsin x = t \Longrightarrow x = \sin t$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\arcsin x}{5x} = \lim_{t\to 0} = \frac{4t}{5\sin t} = \frac{4}{5} \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = \frac{4}{5}.$$

2. Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$. Si vede facilmente, inoltre, che $f(x) = 0$ quando $x = -3$ e $x = 1$ e che $f(x) > 0$ quando $x < -3$ oppure $x > 1$.
Per quanto riguarda i limiti

$$\lim_{x\to +\infty} e^x(x^2+2x-3) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^x(x^2+2x-3) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2x-3}{e^{-x}} = 0.$$

L'asse delle ascisse è un **asintoto orizzontale sinistro**. Dal momento che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, non ci sono asitoti obliqui.
La derivata prima è

$$f'(x) = e^x(x^2+2x-3) + e^x(2x+2) = e^x(x^2+4x-1).$$

Si vede che $f'(x) = 0$ quando $x = -2-\sqrt{5}$ e $x = -2+\sqrt{5}$ e che $f'(x) > 0$ se $x < -2-\sqrt{5}$ oppure $x > -2+\sqrt{5}$. Si conclude, quindi, che $x_M = -2-\sqrt{5}$ è un **punto di massimo relativo** con ordinata del massimo $y_M = e^{-2-\sqrt{5}}(2+2\sqrt{5})$, mentre $x_m = -2+\sqrt{5}$ è un **punto di minimo assoluto** con ordinata del minimo $y_m = e^{-2+\sqrt{5}}(2-2\sqrt{5})$.
La derivata seconda è

$$f''(x) = e^x(x^2+4x-1) + e^x(2x+4) = e^x(x^2+6x+3).$$

La $f''(x)$ si annulla quando $x = -3-\sqrt{6}$ e $x = -3+\sqrt{6}$ e $f''(x) > 0$ quando $x < -3-\sqrt{6}$ oppure $x > -3+\sqrt{6}$. Quindi $x_{F_1} = -3-\sqrt{6}$ è un **punto di flesso discendente** mentre $x_{F_2} = -3+\sqrt{6}$ è un **punto di flesso ascendente**.
L'equazione della retta tangente al grafico della funzione in $x = 0$ è

$$y - f(0) = f'(0)x \Longrightarrow y + 3 = -x \Longrightarrow y = -x - 3.$$

Il grafico della funzione è riportato nella figura seguente

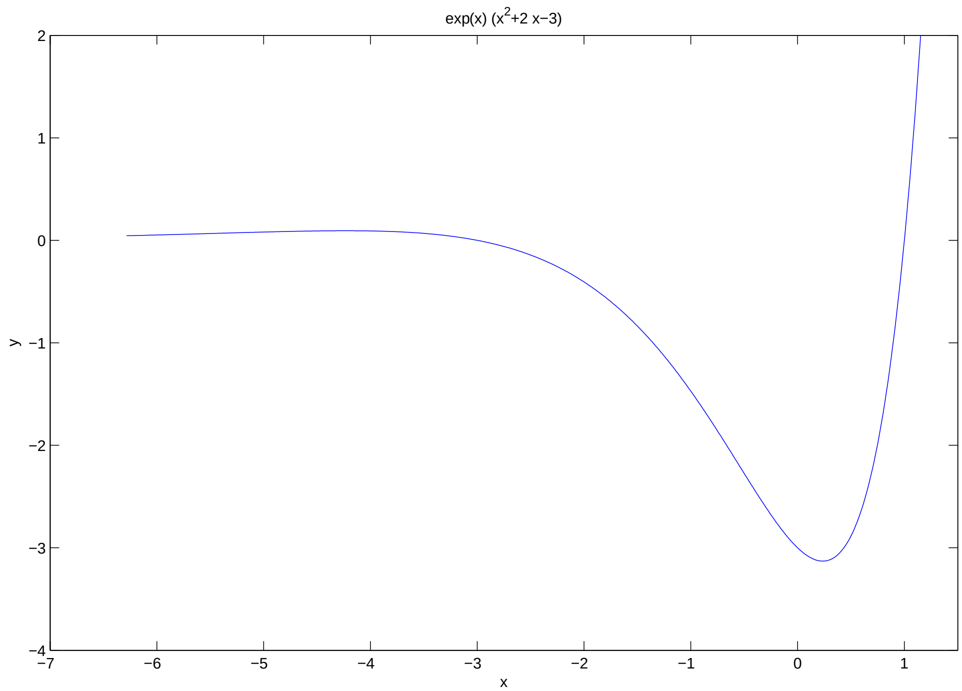

Figura 1: grafico della funzione $f(x) = e^x(x^2 + 2x - 3)$

3. Nel primo caso si può porre

$$\sqrt{e^{2x}+1} = t \Longrightarrow e^{2x} + 1 = t^2 \Longrightarrow 2e^{2x}dx = 2tdt \Longrightarrow e^{2x}dx = tdt,$$

per cui

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}\,dx = \int \frac{t\,dt}{t} = \int dt = t + C = \sqrt{e^{2x}+1} + C.$$

Nel secondo caso si pone $\log x = t \Longrightarrow \frac{dx}{x} = dt$, per cui

$$\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(\log x)}{x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$