. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di laurea (FIS, MAT e APPL)

Analisi Matematica I o Calcolo I — 1 aprile 2005

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Calcolare i limiti $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x-5x^2}{1-\cos x}$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{3x}\right)$ $\quad$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-9x^2}}{x^2}$

SOLUZIONE. Dividendo numeratore e denominatore per x^2, il primo limite richiesto diventa

$$\lim_{x\to 0}\left(3\frac{\sin^2 x}{x^2}-5\right)\frac{x^2}{1-\cos x}=(3-5)2=-4$$

(si sono usato i limiti notevoli relativi alle funzioni $(\sin x)/x$ e $(1-\cos x)/x^2$).
Moltiplicando e dividendo per 3 e poi ponendo $y=1/(3x)$, il secondo limite diventa

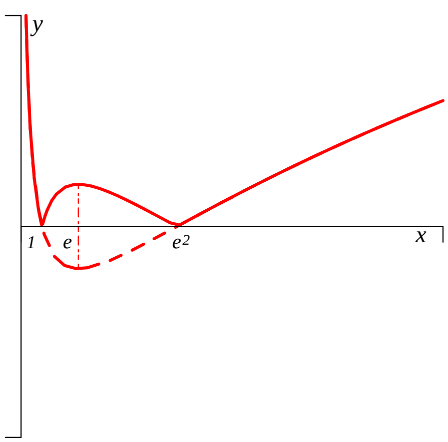
$$\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}3x\log\left(1+\frac{1}{3x}\right)=\frac{1}{3}\lim_{y\to 0^+}\frac{\log(1+y)}{y}=\frac{1}{3}$$

(si è usato il limite notevole relativo alla funzione $(\log(1+y))/y$).
Moltiplicando e dividendo per $1+\sqrt{1-9x^2}$, il terzo limite richiesto diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-9x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-9x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{9}{1+\sqrt{1-9x^2}}=\frac{9}{2}\,.$$

---

2. Studiare la funzione reale di variabile reale $\quad f(x)=|\log^2 x-\log x^2|\quad$ e disegnarne il grafico (è richiesto anche lo studio della convessità; esprimere il campo di esistenza mediante intervalli o semirette, oppure loro unioni). Scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x=e^3$.



SOLUZIONE. Il campo di esistenza è costituito da $]0,+\infty[$ e la funzione assume solo valori non negativi. Lo studio di funzione può essere condotto direttamente, ma si semplifica se si pone $g(x)=\log^2 x-\log x^2$ e se si osserva che $g(x)=(\log x-1)^2-1$. La funzione g si annulla solo per $x=1$ o $x=e^2$. Si ha facilmente

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty=\lim_{x\to 0^+}g(x).$$

La derivata esiste in tutti i punti del campo di esistenza e vale

$$g'(x)=\frac{2}{x}(\log x-1)\ :$$

g' è strettamente positiva (dunque g è strettamente crescente) in $]e,+\infty[$, g' è strettamente negativa (dunque g è strettamente decrescente) in $]0,e[$. Quindi, $x=e$ è un punto di minimo relativo (anzi, assoluto) e non vi sono punti di massimo relativo o assoluto. La derivata seconda di g esiste in tutti i punti del campo di esistenza e vale

$$g''(x)=-\frac{2}{x^2}(\log x-2).$$

Risulta $g''(x)>0$ (e dunque g è convessa) in $]0,e^2[$, mentre $g''(x)<0$ (e dunque g è concava) in $]e^2,+\infty[$. Il grafico di g è riportato in figura (nell'intervallo $]1,e^2[$ va presa la linea tratteggiata). Poiché $f=|g|$, il suo grafico è ottenuto da quello di g per simmetria rispetto all'asse x dei tratti corrispondenti a $g<0$: si ottiene la linea continua della figura.

Si osservi che l'operazione di simmetria genera un punto di tipo angoloso in $x = 1$ e in $x = e^2$, ove f assume il suo valore minimo assoluto. Inoltre, anche la monotonia e la convessità sono modificate: nell'intervallo $]1, e[$ la funzione f è crescente, nell'intervallo $]e, e^2[$ la funzione f è decrescente, nell'intervallo $]1, e^2[$ la funzione f è concava. Il grafico di f è riportato in figura (linea continua).
L'equazione cartesiana della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x = e^3$ è

$$y = g'(e^3)(x - e^3) + g(e^3), \qquad \text{ossia} \qquad y = 4e^{-3}x - 1.$$

---

3. Calcolare gli integrali $\displaystyle\int e^x \cos(3x)\, dx$ e $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \cos x\, dx$

SOLUZIONE. Nel primo integrale si integra due volte per parti come segue

$$\int e^x \cos(3x)\, dx = e^x \cos(3x) + 3 \int e^x \sin(3x)\, dx = e^x \cos(3x) + 3 \left(e^x \sin(3x) - 3 \int e^x \cos(3x)\, dx \right) =$$
$$= e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x) - 9 \int e^x \cos(3x)\, dx :$$

Confrontando il primo e l'ultimo membro, si ha

$$\int e^x \cos(3x)\, dx = e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x) - 9 \int e^x \cos(3x)\, dx,$$

da cui

$$\int e^x \cos(3x)\, dx = \frac{1}{10}\, e^x \left[\cos(3x) + 3 \sin(3x)\right] + C,$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$. Nel secondo integrale si applica la sostituzione $y = \sin x$ (da cui $dy = \cos x dx$):

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} \cos x\, dx = \int_0^1 \sqrt{y}\, dy = \left[\frac{2}{3} y^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\ .$$