PROVA SCRITTA DI CALCOLO I. 27 giugno 2005.

....

Cognome e nome | firma | Corso di laurea

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2+x}\right)^{\frac{x}{3}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x\log(1-2x)}{e^{x^2}-1}.$$

2. Studiare la seguente funzione reale di variabile reale

$$f(x)=\frac{x}{\log^3|x|}$$

e tracciarne il grafico.

3. Stabilire per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ è continua la funzione

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\le 2\\ \frac{e^{x+k}-1}{x-2} & x>2\end{cases}.$$

4. Calcolare i seguenti integrali

$$\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad \int_0^2 x^3e^{-x^2}\,dx.$$

SOLUZIONE.

1. Per calcolare il primo limite basta porre $2+x=y$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2+x}\right)^{\frac{x}{3}}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y-2}{3}}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{3}}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e}.$$

Nel secondo caso si può moltiplicare e dividere per $-2x$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\log(1-2x)}{e^{x^2}-1}=-2\lim_{x\to0}\frac{x^2\log(1-2x)}{(-2x)(e^{x^2}-1)}=-2\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^{x^2}-1}\frac{\log(1-2x)}{(-2x)}=-2$$

2. Il dominio della funzione è

$$\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}-\{0,\pm1\}.$$

Si può osservare che $f(x)$ è una funzione dispari per cui sarà sufficiente studiarla per $x>0$. In questo caso la funzione diventa

$$g(x)=\frac{x}{\log^3 x}.$$

Per $x>0$ la $g(x)$ non si annulla mai, risulta negativa per $x\in(0,1)$ e positiva per $x\in(1,+\infty)$.
Per quanto riguarda i limiti, abbiamo

- $\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\log^3 x}=0$
- $\lim_{x\to1^-}\frac{x}{\log^3 x}=-\infty$
- $\lim_{x\to1^+}\frac{x}{\log^3 x}=+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\log^3 x}=+\infty$

Non ci sono asintoti obliqui dal momento che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\log^3 x}=0.$$

La derivata prima è

$$g'(x)=\frac{\log^3 x-3\log^2 x}{\log^6 x}=\frac{\log x-3}{\log^4 x}.$$

La $g'(x)$ si annulla in $x = e^3$, è positiva per $x > e^3$ e negativa per $0 < x < 1$ e per $1 < x < e^3$. Di conseguenza $x_m = e^3$ è un **punto di minimo relativo** con ordinata del minimo $y_m = \frac{e^3}{27}$. Poichè $\lim_{x\to 0^+} g'(x) = 0$, il grafico si avvicina all'origine con tangente orizzontale. La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{\frac{1}{x}\log^4 x - (\log x - 3)4\log^3 x\frac{1}{x}}{\log^8 x} = \frac{\log x - 4(\log x - 3)}{x\log^5 x} = \frac{12 - 3\log x}{x\log^5 x}.$$

La $g''(x)$ si annulla per $x = e^4$, è positiva per $1 < x < e^4$ e negativa altrove. Per cui $x_F = e^4$ è un **punto di flesso discendente** con ordinata del flesso $y_F = \frac{e^4}{64}$. A questo punto, nel tracciare il grafico di f, occorre tenere conto della simmetria rispetto all'origine. Il grafico è riportato nella figura seguente

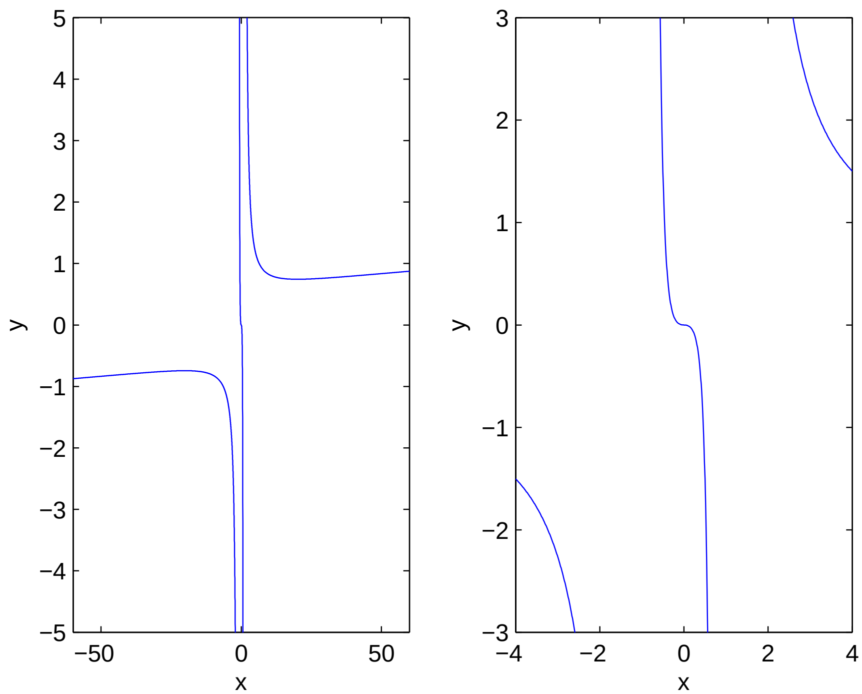

Figura 1: grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{\log^3|x|}$.(a destra, i dettagli del grafico in un intorno dell'origine.)

3. Dal momento che

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x+k}-1}{x-2} = \begin{cases} 1 & \text{se } \ k=-2 \\ +\infty & \text{se } \ k\neq -2 \end{cases}$$

si ha che la funzione risulta continua solo per $k=-2$.

4. Il primo integrale può essere riscritto come

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Per quanto riguarda il secondo integrale abbiamo

$$\int_0^2 x^3 e^{-x^2} dx \underbrace{=}_{x^2=t\longrightarrow 2x dx = dt} \frac{1}{2}\int_0^4 te^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left\{\left[-te^{-t}\right]_0^4 + \int_0^4 e^{-t}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{[-4e^{-4}] + [-e^{-4}+1]\right\} = \frac{1}{2}(1-5e^{-4}).$$