PROVA SCRITTA DI CALCOLO I. 25 luglio 2005.

....

Cognome e nome   firma   Corso di laurea

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x\sin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$$

2. Studiare la seguente funzione reale di variabile reale e tracciarne il grafico

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$$

3. Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{x}{\cos^2 2x}\,dx \qquad \int_1^2 \frac{\sqrt{\log x+1}}{x}\,dx$$

SOLUZIONE.

1. Per quanto riguarda il primo limite è sufficiente moltiplicare e dividere per x in modo da evidenziare dei limiti notevoli. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Nel secondo caso è possibile razionalizzare moltiplicando e dividendo per $\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}$. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}\frac{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{\sin x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}=1$$

2. Il dominio della funzione è

$$\mathrm{dom}(f)=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty).$$

La funzione si annulla solo in $x=0$ e, per il resto, è sempre positiva. Per quanto riguarda i limiti si ha

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$
- $\lim_{x\to -1^-} f(x)=1$

La retta di equazione $y=\frac{1}{2}$ è un asintoto orizzontale destro.
Occorre studiare l'esistenza di eventuali asintoti obliqui per $x\to-\infty$.
Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}{x}=-2.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=-\frac{1}{2}$$

La retta di equazione $y=-2x-\frac{1}{2}$ è un asintoto obliquo sinistro. La derivata prima è

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1.$$

Si vede facilmente che $f'(x)$ non si annulla mai, risulta positiva per $x > 0$ e negativa per $x < -1$. Questo significa che non ci sono punti critici, che la funzione è strettamente decrescente per $x < -1$ e strettamente crescente per $x > 0$. Inoltre $\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$ per cui nei punti $x = -1$ e $x = 0$ la tangente al grafico è verticale. La derivata seconda è

$$f''(x) = -\frac{1}{4(x^2 + x)^{\frac{3}{2}}}.$$

da cui si vede facilmente che $f''(x)$ non si annulla mai ed è negativa in tutto il dominio. Pertanto la curva $y = f(x)$ non ha punti di flesso e rivolge sempre la concavità verso il basso. Il grafico della funzione è riportato nella figura seguente

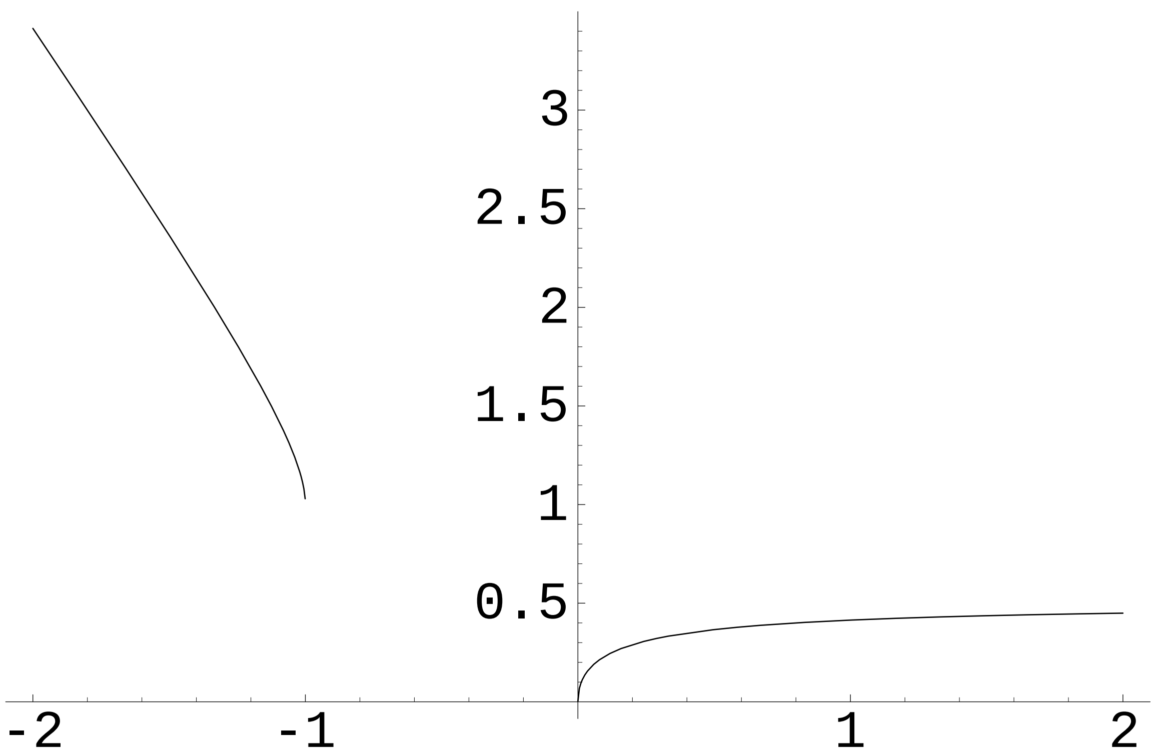

Figura 1: grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$

3. Il primo dei due integrali può essere calcolato per parti scegliendo $\frac{1}{\cos^2 2x}$ come fattore differenziale. Si ha

$$\int \frac{x}{\cos^2 2x}\,dx = \frac{1}{2}x\tan 2x - \frac{1}{2}\int \tan 2x\,dx = \frac{1}{2}x\tan 2x - \frac{1}{4}\log|\cos 2x| + C.$$

Nel secondo caso si può porre

$$\sqrt{\log x + 1} = t \longrightarrow \log x + 1 = t^2 \longrightarrow \frac{dx}{x} = 2tdt$$

da cui

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{\log x + 1}}{x}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{\log 2 + 1}} t^2\,dt = \frac{2}{3}\left[t^3\right]_1^{\sqrt{\log 2+1}} = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(\log 2 + 1)^3} - 1\right]$$