PROVA SCRITTA DI CALCOLO I. 19 settembre 2005.

....

Cognome e nome firma Corso di laurea

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)^{2x^2+1} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$$

2. Sia data la funzione

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\log(1-x)}{kx} & x<0 \\ x-k & x\geq 0 \end{cases},$$

dove $k\in\mathbb{R}-\{0\}$. Determinare i valori di k per i quali la funzione f è continua in tutto il suo dominio.

3. Studiare la funzione reale di variabile reale

$$g(x)=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

e tracciarne il grafico.

4. Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{e^{\tan x}-1}{\cos^2 x}\,dx \qquad \int_0^{\log 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$$

SOLUZIONE.

1. Il primo limite può essere risolto ponendo

$$x^2 + 1 = y \longrightarrow 2x^2 + 1 = 2y - 1,$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)^{2x^2+1} = \lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y-1} = \lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-1} = e^2.$$

Nel secondo caso si può, dopo aver scomposto il numeratore, moltiplicare e dividere per x

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x + \cos^2 x)}{x \sin x \cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \frac{x}{\sin x} \frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos x} = \frac{3}{2}.$$

2. Per $x \neq 0$ la funzione f è continua. Occorre imporre la continuità per $x = 0$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1-x)}{kx} = -\frac{1}{k},$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - k = -k.$$

Eguagliando i due limiti si ha $\frac{1}{k} = k$, cioè $k = \pm 1$.

3. Il dominio della funzione è

$$\mathrm{dom}(g) = (0, +\infty).$$

Per quanto riguarda gli zeri e il segno, si vede facilmente che g si annulla per $x = 1$, è negativa per $x \in (0,1)$ e positiva per $x \in (1, +\infty)$.
I limiti agli estremi del dominio sono

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = -\infty$
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$

Non ci sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$ dal momento che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \log x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\log x}{2x^{\frac{3}{2}}}.$$

Di qui si vede che $g'(x)$ si annulla per $x = e^2$, è positiva per $x \in (0, e^2)$ e negativa per $x \in (e^2, +\infty)$. Di conseguenza $x_M = e^2$ è un **punto di massimo** con ordinata del massimo $y_M = \frac{2}{e}$. Si noti, inoltre, che si tratta di un punto di **massimo assoluto**. La derivata seconda è

$$g''(x) = \frac{-\frac{1}{x}2x^{\frac{3}{2}} - (2-\log x)\frac{3}{2}\sqrt{x}}{4x^3} = \frac{3\log x - 8}{4x^{\frac{5}{2}}}.$$

La g'' si annulla per $x = e^{\frac{8}{3}}$, è negativa per $x \in (0, e^{\frac{8}{3}})$ e positiva per $x \in (e^{\frac{8}{3}}, +\infty.)$. Di qui si conclude che $x_F = e^{\frac{8}{3}}$ è un **punto di flesso ascendente** con ordinata del flesso $y_F = \frac{8}{3e^{\frac{4}{3}}}$. Il grafico della funzione è riportato nella pagina seguente.

4. Il primo integrale può essere riscritto come

$$\int \frac{e^{\tan x} - 1}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = e^{\tan x} - \tan x + C.$$

Nel secondo caso si può porre

$$\sqrt{e^x - 1} = t,$$

da cui

$$e^x = t^2 + 1 \longrightarrow x = \log(t^2+1) \longrightarrow dx = \frac{2t}{t^2+1}\, dt.$$

Si ha

$$\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\, dt = 2\int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = 2 - 2\arctan 1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

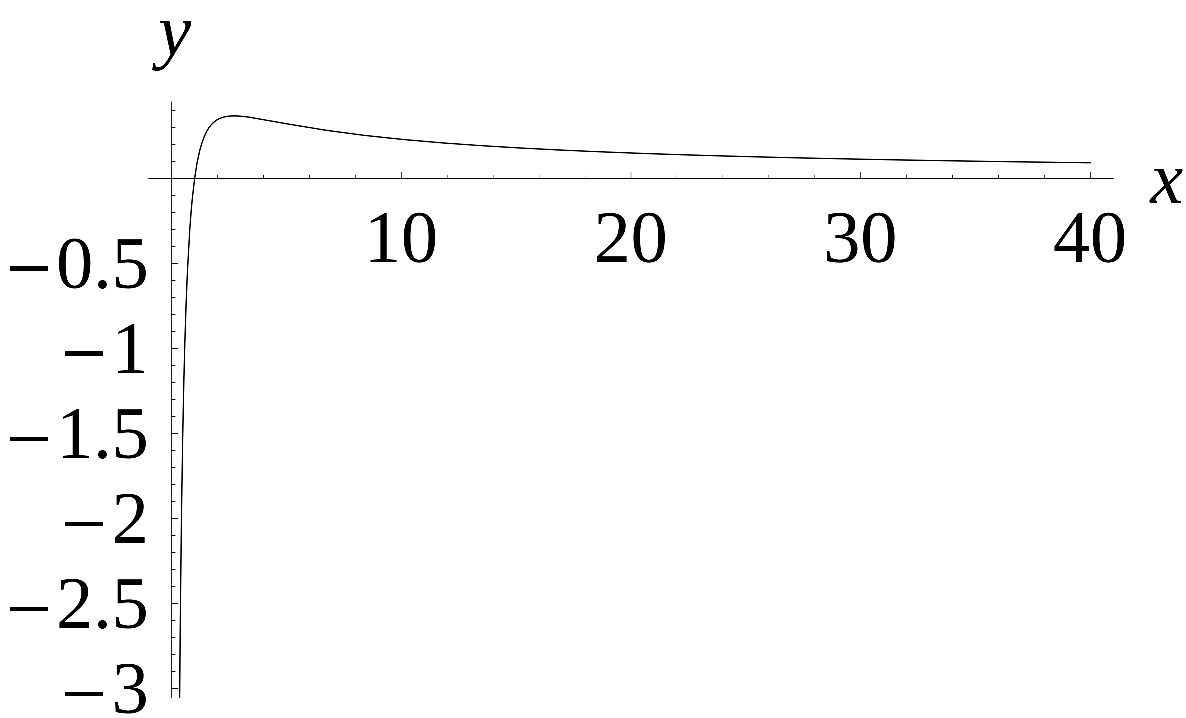

Figura 1: grafico della funzione $g(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$