. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di laurea (FIS, MAT e APPL)

Analisi Matematica I o Calcolo I | 14 dicembre 2005

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Calcolare i limiti (A) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$ e (B) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+5x})$.

SOLUZIONE.

(A) Utilizzando la formula di Taylor per le funzioni seno e coseno, si ha $\sin x = x + f(x)$ e $\cos y = 1 - y^2/2 + g(y)$, dove $f(x)$ (rispett. $g(y)$) è una funzione che tende a zero più rapidamente di x (rispett. y^2). Pertanto, ponendo $y = 2x$, si ottiene $1 + x\sin x - \cos 2x = x^2 + xf(x) - [1 - (2x)^2/2 + g(2x)] = 3x^2 + xf(x) - g(2x)$ e dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+xf(x)-g(2x)}{x^2}\,\frac{x^2}{\sin^2 x}=3:$$

infatti, per le proprietà delle funzioni f e g, $f(x)/x$ e $g(2x)/x^2$ tendono entrambe a 0 per $x\to 0$, mentre $x^2/(\sin^2 x)$ tende a 1 in virtù di uno dei limiti notevoli.

(B) Il limite richiesto si trasforma nel seguente, per effetto del cambio di variabile $x\mapsto -x$:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-5x}-x)(\sqrt{x^2-5x}+x)}{\sqrt{x^2-5x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{\sqrt{x^2-5x}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\sqrt{1-5/x}+1}=-\frac{5}{2}\,.$$

---

2. Si consideri la funzione $g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$g(x)=\begin{cases}(x-2)^3+\beta x^2+1 & x<2\\ \alpha e^{x^2-4} & x\geq 2,\end{cases},\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Determinare i valori di α e di β in modo tale che g risulti continua e derivabile in $x = 2$.

SOLUZIONE. Intanto, per definizione di g, si ha $g(2) = \alpha$ e $g'_d(2) = 4\alpha$. Pertanto, g sarà continua e derivabile in $x = 2$ se e solo se

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2^-}g(x)=\alpha\\ &\lim_{x\to 2^-}\frac{g(x)-\alpha}{x-2}=4\alpha.\end{aligned}\qquad (*)$$

D'altra parte, dalla definizione di g si trova facilmente

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 2^-}g(x)=4\beta+1\\ &\lim_{x\to 2^-}\frac{g(x)-\alpha}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\beta x^2+1-\alpha}{x-2}:\end{aligned}\qquad (**)$$

confrontando le prime righe di $(*)$ e di $(**)$, si trova $\alpha = 4\beta + 1$, quindi il limite che compare nella seconda riga di $(**)$ diventa

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\beta x^2-4\beta}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\beta\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\beta\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4\beta.$$

Confrontando con la seconda riga di $(*)$, si deduce l'uguaglianza $4\alpha = 4\beta$, da cui $\alpha = \beta$ e, ricordando che $\alpha = 4\beta+1$, si ottiene la coppia di valori $\alpha = -1/3$, $\beta = -1/3$.

---

3. Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ della funzione $\phi(x) = \sqrt{1+x^3} - 1$.
SOLUZIONE. Per definizione, occorre determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che il limite per $x \to 0^+$ di $\phi(x)/x^\alpha$ esista finito e non nullo. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\phi(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{1+x^3}-1)(\sqrt{1+x^3}+1)}{x^\alpha(\sqrt{1+x^3}+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x^\alpha(\sqrt{1+x^3}+1)}$$

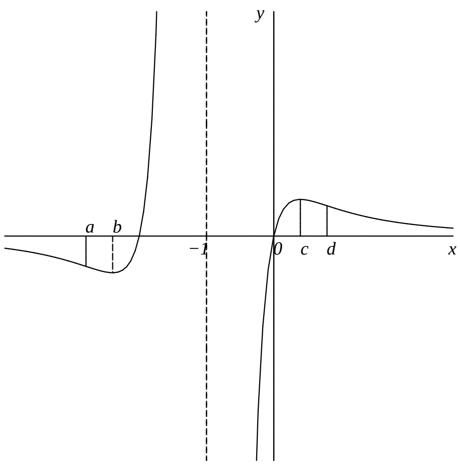
e quest'ultimo limite esiste per ogni valore di α, è finito se e solo se $\alpha \le 3$, è non nullo se e solo se $\alpha = 3$.

---

4. Studiare la funzione $\displaystyle f(x) = \frac{\log|x+1|}{(x+1)^3}$ e disegnarne il grafico.
SOLUZIONE. Il campo di esistenza D è dato da $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$. I limiti sono i seguenti

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty.$$

La funzione è derivabile in tutto il campo di esistenza e la derivata è



$$f'(x) = -\frac{3\log|x+1|-1}{(x+1)^4}$$

(la formula vale sia per $x < -1$ che per $x > -1$): posto $b = -\sqrt[3]{e} - 1$ e $c = \sqrt[3]{e} - 1$, si ha $f' > 0$, e quindi f è crescente, in $]b,-1[$ e in $]-1,c[$, mentre risulta $f' < 0$, e quindi f è decrescente, in $]-\infty,b[$ e in $]c,+\infty[$. Ne segue che b è un punto di minimo relativo e c è un punto di massimo relativo. Infine, si ha

$$f''(x) = \frac{-7+12\log|x+1|}{(x+1)^5}$$

(la formula vale sia per $x < -1$ che per $x > -1$): posto $a = -\sqrt[12]{e^7} - 1$ e $d = \sqrt[12]{e^7} - 1$, si ha $f'' > 0$, e quindi f è convessa, in $]a,-1[$ e in $]d,+\infty[$, mentre risulta $f'' < 0$, e quindi f è concava, in $]-\infty,a[$ e in $]-1,d[$. Ne segue che a e d sono punti di flesso.

---

5. Calcolare i seguenti integrali $\displaystyle\int e^{5x}\cos 3x\,dx \qquad \int \frac{3x+1}{x^2+2x}\,dx \qquad \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx$

SOLUZIONE. Nel primo integrale si integra due volte per parti come segue

$$\int e^{5x}\cos 3x\,dx = \frac{e^{5x}}{5}\cos 3x + \int \frac{e^{5x}}{5} 3\sin 3x\,dx = \frac{e^{5x}}{5}\cos 3x + \frac{3}{5}\left(\frac{e^{5x}}{5}\sin 3x - \int \frac{e^{5x}}{5} 3\cos 3x\,dx\right):$$

portando l'ultimo integrale a primo membro si ha

$$\left(1+\frac{9}{25}\right)\int e^{5x}\cos 3x\,dx = \frac{e^{5x}}{5}\cos 3x + \frac{3}{25}e^{5x}\sin 3x + C,$$

da cui $$\int e^{5x}\cos 3x\,dx = \frac{5}{34}e^{5x}\cos 3x + \frac{3}{34}e^{5x}\sin 3x + C,$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.
Nel secondo integrale si può procedere come segue:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2+2x}\,dx &= \int \frac{3x+1}{x(x+2)}\,dx = \int \frac{3}{(x+2)}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2+x-x}{x(x+2)}\,dx = \\ &= 3\int \frac{1}{(x+2)}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx = \\ &= \left(3-\frac{1}{2}\right)\int \frac{1}{(x+2)}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{5}{2}\log|x+2| + \frac{1}{2}\log|x| + C,\end{aligned}$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.
Il terzo integrale si calcola mediante la sostituzione $t = 1+\sqrt{x+1}$, da cui $dx = 2(t-1)dt$:

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx = \int_2^{1+\sqrt{5}} \frac{1}{t}\,2(t-1)\,dt = 2\Big[t - \log t\Big]_2^{1+\sqrt{5}} = 2[-1+\sqrt{5} - \log(1+\sqrt{5}) + \log 2].$$