PROVA SCRITTA DI CALCOLO I. 15 febbraio 2006.

....

Cognome e nome | firma | Corso di laurea

1. Determinare il valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che risulti finito il limite
$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - \alpha x.$$

2. Stabilire l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ della funzione
$$g(x) = e^{x^2} - x^2 - 1.$$

3. Studiare la funzione reale di variabile reale
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} + x,$$
e tracciarne il grafico. A partire dl grafico di f, costruire quello di
$$F(x) = |f(x)| - \frac{3}{2}.$$

4. Calcolare i seguenti integrali
$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}\,dx \qquad \int_1^2 \frac{x+2}{x^2+3x}\,dx.$$

5. (*Facoltativo*)
Sia data la funzione
$$\varphi(x) = E(x) + E(-x),$$
dove $E(x)$ è la funzione *parte intera* di x. Tracciare il grafico di φ e discuterne la continuità.

1. Osserviamo che deve essere $\alpha < 0$ altrimenti il limite risulterebbe infinito. A questo punto è possibile razionalizzare e scrivere

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2-x+1}-\alpha x)(\sqrt{x^2-x+1}+\alpha x)}{\sqrt{x^2-x+1}+\alpha x} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-\alpha^2)x^2-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+\alpha x}. \end{aligned} \tag{1}$$

   L'espressione precedente tende a un limite finito se è nullo il coefficiente del termine di secondo grado a numeratore, cioè se

$$1-\alpha^2 = 0 \to \alpha = \pm 1, \tag{2}$$

   da cui, poichè α deve essere negativo, abbiamo che $\alpha = -1$. Con questo valore del parametro il valore del limite è $\frac{1}{2}$.

2. Dobbiamo determinare il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ tale per cui risulta *finito* e *non nullo* il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^k}. \tag{3}$$

   Applicando il teorema di de l'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^k} \underbrace{=}_{\text{de l'Hôpital}} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x(e^{x^2}-1)}{kx^{k-1}} = \frac{2}{k}\lim_{x\to 0^+} x^{4-k}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}. \tag{4}$$

   Ora, poichè $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}$, concludiamo che il limite (4) è finito e diverso da zero solo se $k = 4$; pertanto la funzione g è un infinitesimo del quarto ordine per $x \to 0^+$.In particolare, se $k = 4$ il limite vale $1/2$.
   In alternativa, possiamo eseguire il calcolo usando lo sviluppo di McLaurin per la funzione esponenziale. Infatti

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + R(x), \tag{5}$$

   dove

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{R(x)}{x^4} = 0. \tag{6}$$

   Sostituendo lo sviluppo (5) nella (4) abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^k} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^2+\frac{x^4}{2}+R(x)-1-x^2}{x^k} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4\left[\frac{1}{2}+\frac{R(x)}{x^4}\right]}{x^k} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x^{4-k}\left[\frac{1}{2}+\frac{R(x)}{x^4}\right]. \tag{7}$$

Poichè $\lim_{x\to 0^+} \frac{R(x)}{x^4} = 0$, concludiamo che il limite (7) è finito e non nullo (e uguale a $1/2$) solo se $k = 4$.

3. La f è definita se

$$x^2 + 3x \geq 0 \to x \leq -3 \vee x \geq 0,$$

per cui

$$\mathrm{dom}(f) = (-\infty, -3] \cup [0, +\infty).$$

La f si annulla in $x = 0$, risulta positiva per $x > 0$ e negativa per $x \leq -3$.

Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio abbiamo

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x} + x = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+3x} + x = 0 = f(0)$
- $\lim_{x\to -3^-} \sqrt{x^2+3x} + x = -3 = f(-3)$
- Il limite per $x \to -\infty$ presenta una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$ che possiamo razionalizzare

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x} + x =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}+x)(\sqrt{x^2+3x}-x)}{\sqrt{x^2+3x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x\left(-\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1\right)} = -\frac{3}{2}$$

Questo significa che la retta di equazione $y = -\frac{3}{2}$ è un asintoto orizzontale sinistro. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui per $x \to +\infty$. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)}{x} = 2, \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x}+x-2x = \\
&\quad = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \\
&\quad = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)} = \frac{3}{2}.
\end{aligned} \tag{9}
$$

La retta di equazione $y = 2x + \frac{3}{2}$ è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Calcoliamo la derivata prima

$$
f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} + 1. \tag{10}
$$

Si vede facilmente che l'equazione $f'(x) = 0$ non ha alcuna soluzione e che $f'(x) > 0$ per $x \geq 0$ mentre $f'(x) < 0$ per $x \leq -3$. Questo significa che la f è strettamente crescente per $x \geq 0$ mentre è strettamente decrescente per $x \leq -3$. Inoltre, poichè

$$
\lim_{x\to-3^-} f'(x) = -\infty,
$$

e

$$
\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty
$$

il grafico della funzione arriva in $x = -3$ e $x = 0$ con tangente verticale.
La derivata seconda è

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{4\sqrt{x^2+3x} - \frac{(2x+3)^2}{\sqrt{x^2+3x}}}{4(x^2+3x)} = \\
&= \frac{4(x^2+3x)-(2x+3)^2}{4(x^2+3x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{9}{4(x^2+3x)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Dalla (11) si vede subito che la $f''(x)$ non ha zeri ed è sempre negativa. Questo significa che il grafico di f rivolge sempre la concavità verso il basso.
Il grafico della funzione F si ottiene da quello di f riflettendone rispetto all'asse delle x il ramo negativo e, successivamente, traslando verso il basso di $\frac{3}{2}$.

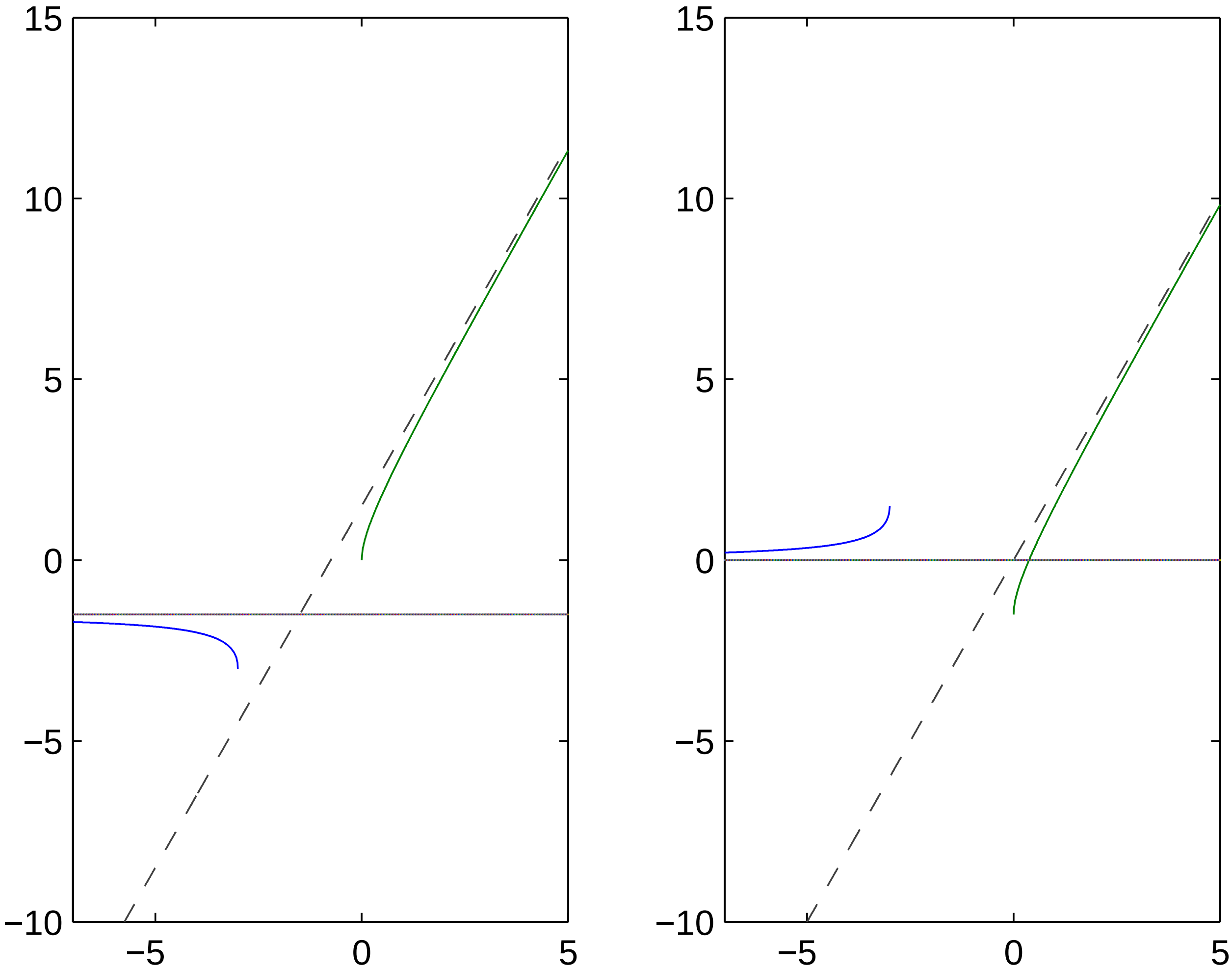

Figura 1: grafico di $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} + x$ (a sinistra) e di $F(x) = |f(x)| - \frac{3}{2}$.

4. Nel primo caso procediamo per sostituzione

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}dx \underbrace{=}_{\substack{\sqrt{2x+1}=t \\ x=\frac{t^2-1}{2} \\ dx=tdt}} \int \frac{t^2-1}{2}\frac{1}{t+1}tdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int t(t-1)dt = \frac{1}{2}\int t^2dt - \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + C =$$
$$= \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + C. \tag{12}$$

Nel secondo caso possiamo scomporre la funzione integranda in fratti parziali

$$\frac{x+2}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} \to \frac{x+2}{x(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A}{x(x+3)}.$$

Di qui, eguagliando i numeratori, otteniamo il seguente sistema nelle incognite A e B

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A=2 \end{cases} \to \begin{cases} A=2/3 \\ B=1/3 \end{cases}.$$

In definitiva

$$\int_1^2 \frac{x+2}{x(x+3)}dx = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{1}{x}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+3}dx =$$
$$= \frac{2}{3}[\log|x|]_1^2 + \frac{1}{3}[\log|x+3|]_1^2 = \frac{1}{3}\log 5. \tag{13}$$

5. In base alle proprietà della funzione $E(x)$ è facile vedere che

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1 & x \neq n \\ 0 & x = n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

La $\varphi(x)$ presenta delle discontinuità eliminabili in corrispondenza di $x = n$ con $n \in \mathbb{Z}$.