PROVA SCRITTA DI CALCOLO I. 3 aprile 2006.

....

Cognome e nome   firma   Corso di laurea

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+a} & x \geq 3 \\ 2x - b & -1 \leq x < 3 \\ x^2 - 2b & x < -1 \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$
   - Determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la f risulti continua in tutto il suo dominio.
   - Tracciare il grafico di f.
   - Determinare l'insieme immagine.
   - Stabilire se f è iniettiva.

2. Calcolare i seguenti limiti
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2 - 1} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x+3} \right)^x.$$

3. Studiare la seguente funzione reale di variabile reale
$$g(x) = e^{-x} |x(x+2)|,$$
e tracciarne il grafico. Scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente al grafico di g nel punto $x = 1$.

4. Stabilire l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ della funzione
$$\varphi(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

5. Calcolare i seguenti integrali
$$\int \frac{2x+1}{x^2 + 6x + 9}\, dx \qquad \int_0^{\pi} e^{-x} \sin(2x)\, dx$$

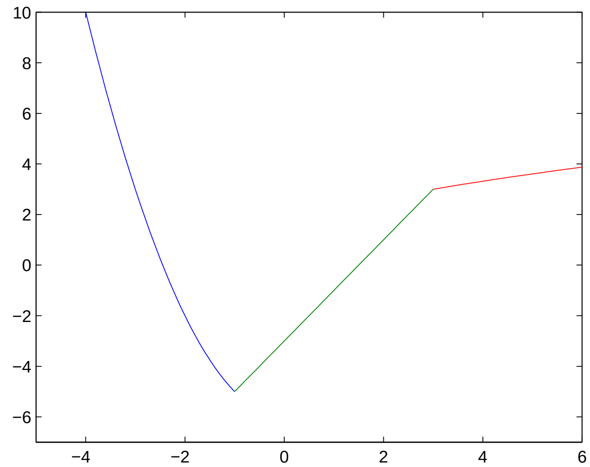

Figura 1: grafico di f

SOLUZIONE.

1. Si vede facilmente che i valori dei parametri che rendono la f continua sono $a = b = 3$, per cui si ha

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+3} & x \geq 3 \\ 2x-3 & -1 \leq x < 3 \\ x^2-6 & x < -1 \end{cases} . \tag{1}$$

   Il grafico è riportato nella figura 1.
   L'insieme immagine è $\mathrm{Im}(f) = [-5, +\infty)$ e si vede che la f non è iniettiva nel suo dominio (per esempio, $f(-\sqrt{6}) = f(3/2) = 0$).

2. Nel primo caso si può riscrivere il limite

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{(2x-1)(2x+1)} = \\ &\quad = -\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{1-2x} \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{2x+1} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\arcsin(1-2x)}{1-2x} \underbrace{=}_{1-2x=y} \\ &\quad = -\frac{1}{2} \lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Nell'eseguire l'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che $\lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1$.
Nel secondo caso è possibile dividere numeratore e denominatore per x e scrivere

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{x+3}{x}}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x} = \frac{e^2}{e^3} = e^{-1}. \quad (3)$$

3. Si ha che $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}$. La g si annulla solo per $x = 0$ e $x = -2$, per il resto è sempre positiva. Per quanto riguarda i limiti agli estremi del dominio si ha

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad (4)$$

per cui l'asse delle ascisse è un asintoto orizzontale destro. Non ci sono asintoti obliqui per $x \to -\infty$. Nel calcolo della $g'(x)$ conviene separare le diverse espressioni di g

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}x(x+2) & x \le -2 \vee x \ge 0 \\ -e^{-x}x(x+2) & -2 < x < 0 \end{cases} \quad (5)$$

per cui

$$g'(x) = \begin{cases} e^{-x}(2-x^2) & x < -2 \vee x > 0 \\ e^{-x}(x^2-2) & -2 < x < 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Chiaramente in $x = 0$ e $x = -2$ la funzione non è derivabile.
La derivata si annulla in $x = \pm\sqrt{2}$ che risultano essere due punti di massimo relativo.
Per quanto riguarda la derivata seconda si ha

$$g''(x) = \begin{cases} e^{-x}(x^2-2x-2) & x < -2 \vee x > 0 \\ e^{-x}(-x^2+2x+2) & -2 < x < 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Ci sono due punti di flesso in $x = 1 \pm \sqrt{3}$. Il grafico della funzione è riportato nella figura 2. La retta tangente al grafico della funzione in $x = 1$ ha equazione $y = \frac{x}{e} + \frac{2}{e}$.

4. Lo sviluppo di McLaurin del $\cos x$ è

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R(x), \quad (8)$$

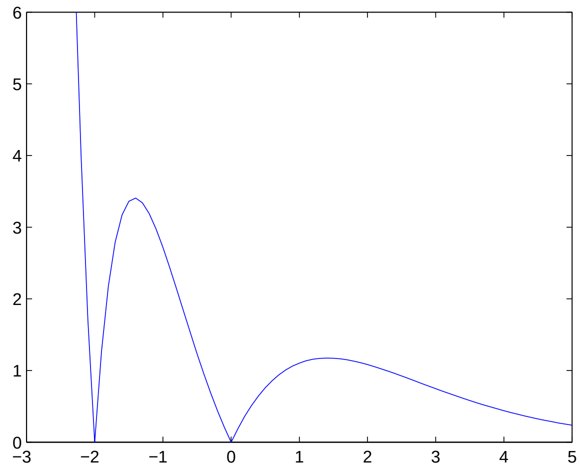

Figura 2: grafico di $g(x) = e^{-x}|x(x+2)|$.

dove $\lim_{x\to 0^+} \frac{R(x)}{x^4} = 0$.
Per cui possiamo scrivere

$$\varphi(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{24} + R(x). \tag{9}$$

La funzione φ è quindi un infinitesimo del quarto ordine per $x \to 0^+$.

5. Nel primo caso si può riscrivere la funzione integranda in modo opportuno

$$\int \frac{2x+1}{x^2+6x+9}\,dx = \int \frac{2x+6-5}{x^2+6x+9}\,dx =$$
$$= \int \frac{2x+6}{x^2+6x+9}\,dx - \int \frac{5}{(x+3)^2}\,dx = \log(x+3)^2 + \frac{5}{x+3} + C. \tag{10}$$

Nel secondo caso si procede per parti

$$\int_0^\pi e^{-x}\sin(2x)\,dx = [-e^{-x}\sin(2x)]_0^\pi + 2\int_0^\pi e^{-x}\cos(2x)\,dx =$$
$$= 2\left\{[-e^{-x}\cos(2x)]_0^\pi - 2\int_0^\pi e^{-x}\sin(2x)\,dx\right\} =$$
$$= 2 - 2e^{-\pi} - 4\int_0^\pi e^{-x}\sin(2x)\,dx. \tag{11}$$

Di qui si ha

$$5\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(2x)\,dx = 2(1-e^{-\pi}) \rightarrow \int_0^{\pi} e^{-x}\sin(2x)\,dx = \frac{2}{5}(1-e^{-\pi}). \tag{12}$$