....

Cognome e nome | firma | Corso di laurea (FIS, MAT e APPL)

Analisi Matematica I o Calcolo I | 28 giugno 2006

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Calcolare i limiti $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+1})$ e $\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$.

SOLUZIONE. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}$, il primo limite richiesto diventa

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3-(x+1)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+1}}=0.$$

Il secondo limite è una forma indeterminata di tipo $0/0$: usando la formula di Taylor per le funzioni e^x e $\sin x$ e indicando con $g(x)$, $h(x)$ e $v(x)$ tre funzioni (opportune) che tendono a zero più rapidamente di x^3, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{(1+x+x^2/2+x^3/3!+g(x))(x-x^3/3!+h(x))-x(1+x)}{x^3}=\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^3/2-x^3/3!+v(x)}{x^3}=\frac12-\frac16=\frac13\,.\end{aligned}$$

---

2. Si consideri la funzione $f(x)=\begin{cases}3x+a & x\in]-\infty,0[\\ b\sin x+1 & x\in[0,\pi/2[\\ (x-c)^2+d & x\in[\pi/2,|\infty[.\end{cases}$ Determinare $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}$ in modo tale che $f\in\mathbf{C}^1(\mathbb{R})$.

Con i valori trovati, calcolare f' e f'' e dire se f è di classe $\mathbf{C}^2(\mathbb{R})$; disegnare il grafico di f, di f' e di f''; calcolare l'integrale $\int_{-1}^5 f(x)dx$.

SOLUZIONE. Imponendo la continuità in 0 (nel nostro caso, $f(x)\to f(0)$ per $x\to0^-$), si trova $a=1$; imponendo la derivabilità in 0 si trova $b=3$; imponendo la derivabilità in $\pi/2$ si trova $c=\pi/2$ e infine imponendo la continuità in $\pi/2$ si trova $d=4$.

Si ha

$$f'(x)=\begin{cases}3 & x\in]-\infty,0[\\ 3\cos x & x\in]0,\pi/2[\\ 2(x-\pi/2) & x\in]\pi/2,|\infty[:\end{cases}$$

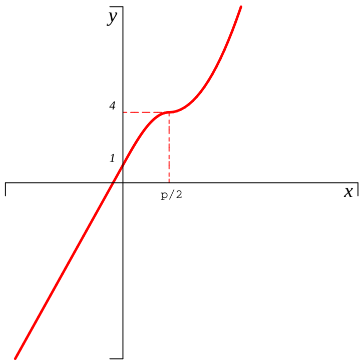
inoltre, f è derivabile anche in $x=0$ (con $f'(0)=3$) e in $x=\pi/2$ (con $f'(\pi/2)=0$), come si vede in base alla definizione di derivabilità. In particolare, f è derivabile ovunque e f' è una funzione continua.

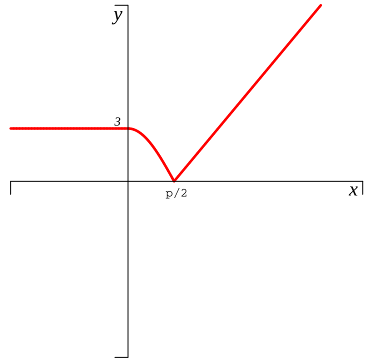
Si ha

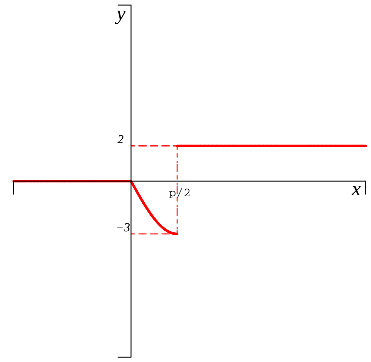
$$f''(x)=\begin{cases}0 & x\in]-\infty,0[\\ -3\sin x & x\in]0,\pi/2[\\ 2 & x\in]\pi/2,|\infty[:\end{cases}$$

inoltre, f' è derivabile anche in $x=0$ (con $f''(0)=0$) ma non in $x=\pi/2$ (dove f' presenta un punto angoloso), come si vede in base alla definizione di derivabilità. In particolare, f è derivabile due volte ovunque tranne per $x=\pi/2$ e f'' è una funzione continua (ove esiste).

Le tre figure sottostanti riportano, nell'ordine, i grafici di f, di f' e di f''.







Per il teorema di additività, l'integrale richiesto è dato da

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(3x+1)dx + \int_{0}^{\pi/2}(3\sin x+1)dx + \int_{\pi/2}^{5}[(x-\pi/2)^2+4]dx = -\frac{1}{2}+3+\frac{\pi}{2}+\frac{\left(5-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3}+4\left(5-\frac{\pi}{2}\right)$$

(i tre integrali nel secondo termine delle uguaglianze sono elementari).

---

3. Calcolare i seguenti integrali $\displaystyle\int_1^e x^2 \log x \, dx$ e $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+2x+1}\, dx$

SOLUZIONE. Nel primo integrale si integra per parti come segue

$$\int_1^e x^2 \log x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^e - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}\, e^3 + \frac{1}{9}\,.$$

Nel secondo integrale si può procedere come segue:

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+1}\, dx = \int \frac{2x+2-2}{(x+1)^2}\, dx = 2\int \frac{1}{x+1}\, dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = 2\log|x+1| + \frac{2}{x+1} + C,$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.