. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di laurea (FIS, MAT e APPL)

Analisi Matematica I o Calcolo I | 19 luglio 2006

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Si calcolino i seguenti limiti:

$$\text{a.}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{6x^2+3x+7}}{3x}\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{6x^2+3x+7}}{3x}$$

$$\text{b.}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos 2x)+x^2}{x^2}$$

SOLUZIONE.

a. Il primo limite esiste e vale $\sqrt{6}/3$: basta scrivere la x a denominatore come $|x|=\sqrt{x^2}$, trasformare poi il quoziente di radici come radice del quoziente e infine trascurare, per $x\to+\infty$, i termini $3/x$ e $7/x^2$.
Il secondo limite esiste e vale $-\sqrt{6}/3$: basta scrivere la x a denominatore come $-|x|=-\sqrt{x^2}$ e successivamente procedere come nel primo caso.

b. Osserviamo preliminarmente che $\cos 2x-1=\cos^2 x-\sin^2 x-(\cos^2 x+\sin^2 x)=-2\sin^2 x$. Inoltre, ricordando la formula di Taylor per il logaritmo $\log(1+t)=t+g(t)$, con t in un intorno di 0 e g funzione infinitesima di ordine superiore a 1, si ha

$$\log(\cos 2x)=\log[1+(\cos 2x-1)]=\log(1-2\sin^2 x)=-2\sin^2 x+g(\sin^2 x),$$

da cui

$$\frac{\log(\cos 2x)+x^2}{x^2}=\frac{-2\sin^2 x+g(\sin^2 x)+x^2}{x^2}=-2\frac{\sin^2 x}{x^2}+\frac{g(\sin^2 x)}{x^2}+1$$

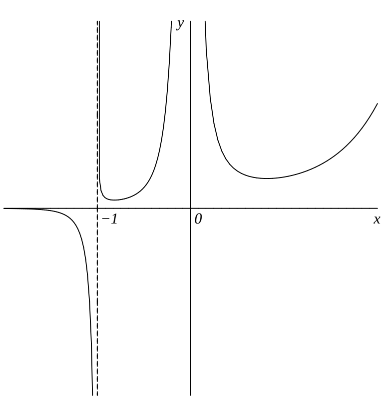
e l'ultimo membro tende a -1 al tendere di x a 0, poiché la prima frazione tende a 1, grazie al limite notevole riguardante la funzione $\sin x$ mentre la seconda tende a 0, dato che $\sin^2 x$ è un infinitesimo dello stesso ordine di x^2 e g è infinitesima di ordine superiore al suo argomento.

---

2. Si consideri la funzione definita da $\qquad f(x)=\dfrac{e^{3x}}{x^2(1+x)}$.

a. Determinare il dominio di f e i limiti agli estremi del dominio.
b. Determinare tutti gli eventuali punti di massimo e minimo relativo per f e dire se sono anche assoluti.
c. Disegnare un grafico qualitativo di f. (Non è richiesto lo studio della derivata seconda.)

SOLUZIONE.



a. La funzione è definita in $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, continua e derivabile quante volte si vuole. I valori assunti sono strettamente positivi in $D\cap]-1,+\infty[$, negativi in $]-\infty,-1[$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\qquad \lim_{x\to-1^-}f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to-1^+}f(x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

b. Si ha

$$f'(x)=e^{3x}\frac{3x^2-2}{x^3(1+x)^2}\,,$$

che si annulla per $x=\pm\sqrt{2/3}$, è strettamente positiva (e quindi f cresce) in $]-\sqrt{2/3},0[$ e in $]\sqrt{2/3},+\infty[$, è strettamente negativa (e quindi f decresce) in $]-\infty,-1[$, in $]-1,-\sqrt{2/3}[$ e in $]0,\sqrt{2/3}[$.

Pertanto, $-\sqrt{2/3}$ e $\sqrt{2/3}$ sono due punti di minimo relativo. Non vi sono punti di massimo relativo, altrimenti dovrebbero annullare la derivata; infine non vi sono punti di massimo o di minimo assoluto perché la funzione è illimitata sia inferiormente che superiormente.

c. Il grafico è riportato sopra.

---

3. Calcolare i seguenti integrali a. $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^3 \sin x \, dx$; b. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2-3x+2)}\, dx$.

SOLUZIONE. a. Integriamo per parti tre volte per determinare le primitive della funzione $x^3 \sin x$:

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cos x \, dx = -x^3 \cos x + 3\left(x^2 \sin x - 2\int x \sin x \, dx\right) =$$
$$= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6\left(-x \cos x + \int \cos x \, dx\right) = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C,$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$\int_0^{2\pi} x^3 \sin x \, dx = \Big[-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C \Big]_0^{2\pi} = 12\pi - 8\pi^3.$$

b. Osservato che $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, si può effettuare subito la decomposizione dell'integrando mediante fratti semplici, oppure si può procedere così:

$$\frac{1}{x(x^2-3x+2)} = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1-x+x}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1-x}{x(x-1)(x-2)} + \frac{x}{x(x-1)(x-2)} =$$
$$= \frac{-1}{x(x-2)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2}\frac{-2+x-x}{x(x-2)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)}\ .$$

Ora resta solo da scrivere l'ultima frazione come somma $A/(x-1) + B/(x-2)$: a conti fatti risulta $A = -1$ e $B = 1$, quindi

$$\frac{1}{x(x^2-3x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\ ,$$

da cui

$$\int \frac{1}{x(x^2-3x+2)}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}\, dx - \int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{1}{x-2}\, dx = \frac{1}{2}\log|x| - \log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x-2| + C,$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.