. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di laurea (FIS, MAT e APPL)

Analisi Matematica I o Calcolo I — 13 settembre 2006

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

1.

(A) Si dimostri che esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ e lo si calcoli.

(B) Si determinino i valori che il numero reale α può assumere affinché il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^\alpha(1-\cos x)}$$

sia finito e non nullo.

SOLUZIONE.

(A) Il limite esiste e vale 0: il numeratore è una funzione limitata, mentre il denominatore tende a $+\infty$.

(B) Moltiplicando e dividendo per x^2, la frazione si trasforma come segue

$$\frac{\sin x}{x^\alpha(1-\cos x)} = \frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{\sin x}{x}\frac{x^2}{x^\alpha(1-\cos x)} \quad :$$

al tendere di x a 0, la seconda e la terza frazione a secondo membro tendono rispettivamente a 1 e a 2, grazie ai limiti notevoli riguardanti le funzioni $\sin x$ e $\cos x$. Pertanto il limite complessivo sarà finito e non nullo se e solo se $\alpha + 1 = 0$, ossia $\alpha = -1$.

---

2. Si consideri la funzione definita da $f(x) = \log(1+x^2)$.

a. Disegnare nel piano cartesiano un grafico accurato di f.

b. Determinare il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f negli eventuali punti di flesso di f.

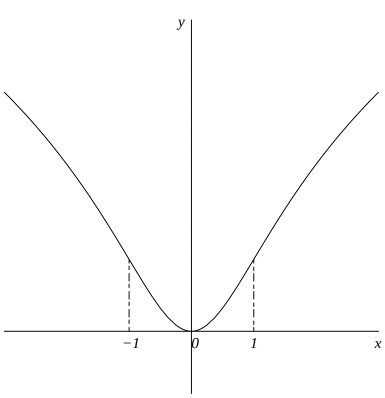
c. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 associato a f centrato nel punto 0.

d. Dire se la restrizione di f alla semiretta $[0, +\infty[$ è invertibile. In caso affermativo calcolare la funzione inversa.

e. Dire se f è globalmente invertibile. In caso affermativo calcolare la funzione inversa.

SOLUZIONE.

a. La funzione è definita in $\mathbb{R}$, continua e derivabile quante volte si vuole. I valori assunti sono strettamente positivi, ad eccezione di $x = 0$ ove la funzione si annulla; infine la funzione è pari.



Per $x \to \pm\infty$ si ha evidentemente $f(x) \to +\infty$; inoltre si ha $f'(x) = 2x/(1+x^2)$, che si annulla per $x = 0$, è strettamente positiva (e quindi f cresce) in $]0, +\infty[$, è strettamente negativa (e quindi f decresce) in $]-\infty, 0[$. Pertanto, 0 è un punto di minimo relativo (di fatto, assoluto perché come già osservato $f(0) = 0$ mentre $f(x) > 0\ \forall x \neq 0$). Infine, si ha $f''(x) = 2(1-x^2)/(1+x^2)^2$, che si annulla per $x = \pm 1$, è strettamente positiva (e quindi f è convessa) in $]-1, 1[$, è strettamente negativa (e quindi f è concava) in $]-\infty, -1[$ e in $]1, +\infty[$. Pertanto, $x = 1$ e $x = -1$ sono punti di flesso. Il grafico è riportato a lato.

b. Il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in $(1, f(1))$ è pari a $f'(1)$, che vale 1. Per la simmetria, il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in $(-1, f(-1))$ è pari a -1.

c. Per definizione e nelle opportune ipotesi, il polinomio di Taylor di ordine 2 associato a f centrato nel punto x_0 è dato da $P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2/2$, nel nostro caso $P_2(x) = x^2$.

d. La restrizione di f alla semiretta $[0, +\infty[$, con valori in $[0, +\infty[$, è invertibile perché continua, illimitata, strettamente monotona e nulla nell'origine (la continuità e l'illimitatezza superiore, unitamente al fatto che

$f(0) = 0$, implicano la suriettività; la momotonia stretta implica l'iniettività). La funzione inversa è $g(y) = \sqrt{e^y - 1}$, definita in $[0, +\infty[$: si osservi che nell'estrazione della radice quadrata si scarta la soluzione negativa perché i valori assunti dalla funzione g devono essere non negativi.

e. La funzione f non è globalmente invertibile perché non è iniettiva.

---

3. Calcolare i seguenti integrali $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2} x\, dx$; $\displaystyle\int_0^1 x \arctan x\, dx$.

SOLUZIONE. Il primo integrale si calcola mediante la sostituzione $t = x^2$, da cui $dt = 2xdx$:

$$\int_0^2 e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 e^t\, dt = \frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

Nel secondo integrale si integra per parti come segue

$$\int_0^1 x \arctan x\, dx = \frac{1}{2}\Big[x^2 \arctan x\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big[\arctan x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,.$$