Prova scritta di Calcolo I. Alessandria, 15 dicembre 2006

.....

Cognome e nome Firma Corso di laurea

1. a. Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$$

b. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} (x^2+1)^{x^{-2}}.$$

Si discuta, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il valore del limite

$$\lim_{x\to 0^+} (x^2+1)^{x^\alpha}$$

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) := \frac{\log x}{x} - x + 1.$$

a. Determinare il dominio di f e studiare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti.

b. Determinare gli intervalli di monotonia della f e gli eventuali minimi e massimi relativi.

c. Studiare gli intervalli di convessità e di concavità di f.

d. Disegnare il grafico di f.

e. Disegnare il grafico di $g(x) := |f(x)|$.

3. Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+2)}\,dx, \qquad \int_0^1 \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx.$$

Soluzioni

1. a. Si ha
$$\left|\frac{x-\sin x}{x^3}\right| \leq \frac{|x|+1}{|x|^3}$$
e quindi per il Teorema di confronto (o dei due carabinieri) si ottiene
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3} = 0.$$
Usando la formula di Taylor per il seno si ha
$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + x^3\omega(x),$$
dove $\lim_{x\to 0}\omega(x) = 0$. Quindi si ottiene
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$
Il secondo limite poteva anche essere calcolato usando il Teorema di De L'Hopital.

   b. Per le note proprietà dei logaritmi e degli esponenziali si ha
$$(x^2+1)^{x^{-2}} = e^{x^{-2}\log(x^2+1)}.$$
Utilizzando il limite fondamentale $\lim_{y\to 0}\frac{\log(y+1)}{y} = 1$ si ha $\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+1)}{x^2} = 1$ e quindi
$$\lim_{x\to 0}(x^2+1)^{x^{-2}} = e.$$
Analogamente a quanto appena visto si ha
$$(x^2+1)^{x^\alpha} = e^{x^\alpha\log(x^2+1)},$$
e quindi, scrivendo
$$x^\alpha\log(x^2+1) = x^{\alpha+2}\frac{\log(x^2+1)}{x^2}$$
si ottiene $\lim_{x\to 0} x^\alpha\log(x^2+1) = 0$ se $\alpha > -2$, e $\lim_{x\to 0} x^\alpha\log(x^2+1) = +\infty$ se $\alpha < -2$ mentre il caso $\alpha = -2$ è già stato esaminato. Quindi il limite vale
$$\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)^{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha < -2 \\ e & \alpha = -2 \\ 1 & \alpha > -2 \end{cases}$$

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) := \frac{\log x}{x} - x + 1.$$

a. Il dominio di f è $D(f) = (0, +\infty)$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

e la retta $x = 0$ è asintoto verticale della funzione f.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

e la retta $y = -x + 1$ è asintoto obliquo della funzione f in $+\infty$ in quanto

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (-x + 1) = 0.$$

b. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2} - 1 = \frac{1 - \log x - x^2}{x^2}.$$

Lo studio del segno di f' ci fornisce $f'(x) > 0$ per $x \in (0, 1)$, $f'(1) = 0$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (1, +\infty)$. Quindi f è crescente in $(0, 1)$, decrescente in $(1, +\infty)$ e ha un massimo assoluto in $x = 1$. Il valore massimo assunto da f è quindi $f(1) = 0$. La funzione f non ha minimi.

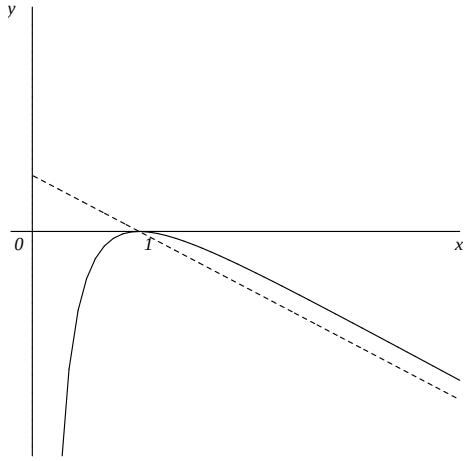
c. La derivata seconda di f è

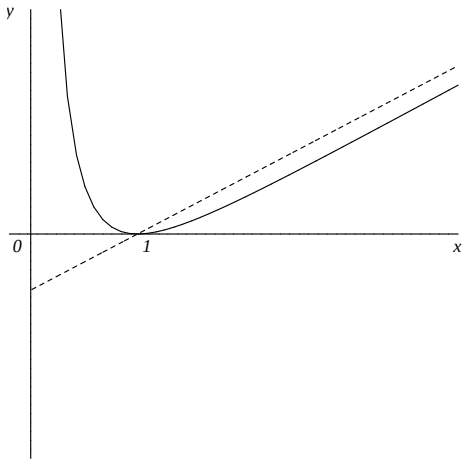
$$f''(x) = \frac{2 \log x - 3}{x^3}.$$

Quindi $f''(x) > 0$ se $x \in (e^{3/2}, +\infty)$ mentre $f''(x) < 0$ se $x \in (0, e^{3/2})$ e $f''(e^{3/2}) = 0$. La funzione f è quindi convessa in $(e^{3/2}, +\infty)$, concava in $(0, e^{3/2})$ e $e^{3/2}$ è punto di flesso.

d. Il grafico di f è rappresentato nella figura di sinistra.

e. Il grafico di g è rappresentato nella figura di destra.





3. La funzione razionale fratta si decompone nel seguente modo

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+2} + \frac{3}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+2}.$$

Siccome

$$\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(x/\sqrt{2}) + c,$$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx = \log|x-1| + c,$$

$$\int \frac{x}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2) + c$$

si ottiene

$$\int \frac{x+2}{(x-1)(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(x/\sqrt{2}) + \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+2) + c.$$

Nel secondo integrale si può fare la sostituzione $t = \sqrt{x}$ e si è ricondotti al calcolo dell'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 2t^2\sin t\,dt.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^1 2t^2\sin t\,dt = \int_0^1 4t\cos t\,dt - 2t^2\cos t\Big|_0^1.$$

Integrando ancora per parti

$$\int_0^1 4t\cos t\,dt = -\int_0^1 4\sin t\,dt + 4t\sin t|_0^1 = 4\cos t|_0^1 + 4t\sin t|_0^1.$$

In definitiva si ottiene

$$\int_0^1 2t^2\sin t\,dt = 4\cos t|_0^1 + 4t\sin t|_0^1 - 2t^2\cos t|_0^1 = 4\sin 1 + 2\cos 1 - 4.$$