....

Cognome e nome firma Corso di laurea (FIS, MAT e APPL)

Analisi Matematica I o Calcolo I 23 gennaio 2007

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Si calcolino i seguenti limiti

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(2-e^x)}{1-e^{\alpha x}}$; b. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\log(2-e^x)}{1-e^{\alpha x}}$.

SOLUZIONE.

a. Si tratta di una forma indeterminata di tipo $0/0$: applicando il teorema di De l'Hôpital e osservato che il limite del quoziente delle derivate vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2-e^x}\ \frac{1}{-\alpha e^{\alpha x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2-e^x}\ \frac{e^{(1-\alpha)x}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\ ,$$

si deduce che anche il limite richiesto vale $1/\alpha$.

b. Per $x \to -\infty$, il numeratore tende a $\log 2$ mentre il denominatore tende a 1 se $\alpha > 0$ e a $-\infty$ se $\alpha < 0$, pertanto il limite richiesto vale $\log 2$ se $\alpha > 0$ e 0 se $\alpha < 0$.

---

2. Si consideri la funzione definita da $f(x) = 1 - \log x + |1 - \log x|$.

a. Determinare il dominio di f, studiare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti.
b. Determinare gli intervalli di monotonia della f e gli eventuali minimi e massimi relativi.
c. Dire se ci sono punti di non derivabilità di f.
d. Disegnare il grafico di f.
e. Studiare la funzione $g(x) = f(|x|)$ e disegnarne il grafico.

SOLUZIONE. La funzione può essere riscritta come $2(1-\log x)^+$ (parte positiva): in particolare essa è identicamente nulla se $1 - \log x \leq 0$, ossia se $x \geq e$, positiva e coincidente con $2(1 - \log x)$ se $x \in]0, e[$.

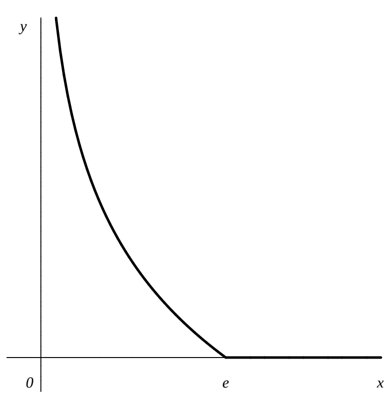
a. La funzione è definita in $]0, +\infty[$, tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e a 0 per $x \to +\infty$: in particolare, l'asse y è un asintoto verticale e l'asse x è un asintoto orizzontale.

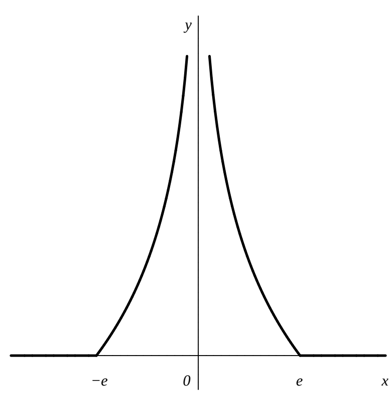
b. Poiché $f(x) = 2(1 - \log x)$ per $x \in]0, e[$, si deduce che in $]0, e[$ f è decrescente; f è costante (nulla), quindi sia non crescente che non descrescente, in $[e, +\infty[$: tutti i punti di questa semiretta sono di minimo relativo (anzi, assoluto); tutti i punti di $]e, +\infty[$ sono di massimo relativo.

c. La funzione non è derivabile in e, poiché la derivata destra vale 0 mentre la derivata sinistra vale

$$f'_s(e) = \lim_{x\to e^-} \frac{2(1-\log x)}{x-e} = -2 \lim_{x\to e^-} \frac{1}{x} = -\frac{2}{e}\ .$$

d. Il grafico è riportato sotto, figura di sinistra.





e. La funzione g è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ed è tale che $g(x) = f(x)$ per $x > 0$, $g(x) = f(-x)$ per $x < 0$. Dunque, il suo grafico coincide con quello di f per $x > 0$ ed è simmetrico rispetto all'asse y (v. figura sopra, a destra).

---

3. Calcolare i seguenti integrali $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\, dx; \qquad \int \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\, dx.$

SOLUZIONE. Il primo integrale si calcola mediante la sostituzione $t = x^2$, da cui $dt = 2x dx$:

$$\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t e^{-t}\, dt.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int_0^1 t e^{-t}\, dt = \Big[- t e^{-t} \Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-t}\, dt = -e^{-1} + \Big[- e^{-t} \Big]_0^1 = -2e^{-1} + 1.$$

In definitiva

$$\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\, dx = -e^{-1} + \frac{1}{2}\,.$$

Nel secondo integrale si decompone l'integrando come segue, dopo aver osservato che $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$:

$$\frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \frac{(A+B+C)x^2 - (5A+3B+2C)x + 6A}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,,$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ 5A + 3B + 2C = -1, \\ 6A = 1 \end{cases}$$

che ha per soluzione $A = 1/6$, $B = -3/2$, $C = 4/3$. Dunque

$$\int \frac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-2}\, dx + \frac{4}{3}\int \frac{1}{x-3}\, dx = \frac{1}{6}\log|x| - \frac{3}{2}\log|x-2| + \frac{4}{3}\log|x-3| + C,$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.