. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di laurea (FIS, MAT e APPL)

Analisi Matematica I o Calcolo I | 27 giugno 2007

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Si calcoli il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x^2} .$$
Utilizzando il confronto, si calcoli il seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^2+\cos x}} .$$

SOLUZIONE. Il numeratore del primo limite può essere scritto come segue: $\log(1+x)+\log(1-x) = \log(1-x^2) = -x^2+g(x)$, dove g è un infinitesimo di ordine superiore a 2. Pertanto
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2+g(x)}{x^2} = -1.$$
Per il secondo limite, osserviamo che per $x \to +\infty$ si ha $0 \le \sin^2 x \le 1$ e $\sqrt{x^2+\cos x} \ge \sqrt{x^2-1}$, da cui
$$0 \le \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^2+\cos x}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ :$$
per il teorema dei due carabinieri, il limite richiesto vale 0.

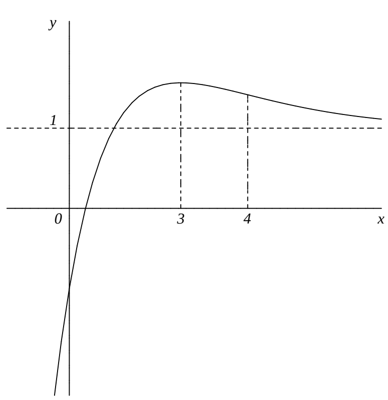
---

2. Si consideri la funzione definita da $\qquad f(x) = (x-2)e^{-x}+1.$

a. Determinare il dominio di f, studiare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti.
b. Determinare gli intervalli di monotonia della f e gli eventuali minimi e massimi relativi.
c. Studiare la convessità di f.
d. Disegnare il grafico di f.

SOLUZIONE.

a. La funzione è definita in $\mathbb{R}$. Quanto ai limiti si ha
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$
Pertanto, la retta $y=1$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$; non vi sono asintoti obliqui $x \to -\infty$, poiché



$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-2)e^{-x}+1}{x} = +\infty.$$

b. Si ha
$$f'(x) = e^{-x}(3-x)$$
che si annulla per $x=3$, è strettamente positiva (e quindi f cresce) in $]-\infty,3[$, è strettamente negativa (e quindi f decresce) in $]3,+\infty[$. Pertanto, $x=3$ è un punto di massimo relativo.

c. Si ha
$$f''(x) = e^{-x}(x-4)$$

che si annulla per $x = 4$, è strettamente positiva (e quindi f è convessa) in $]4, +\infty[$, è strettamente negativa (e quindi f è concava) in $]-\infty, 4[$. Pertanto, $x = 4$ è un punto di flesso.

d. Il grafico è riportato in figura (la scala nei due assi non è la stessa).

3.

a. Calcolare il seguente integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ (suggerimento: moltiplicare e dividere per $1-\sin x$).

b. Definita

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ 2x-2, & \text{se } 1 < x \le 2, \end{cases}$$

calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

SOLUZIONE.

a. Utilizzando il suggerimento, si ha

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx :$$

nell'ultimo integrale si effettua la sostituzione $t = \cos x$, da cui $dt = -\sin x\,dx$ e dunque

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \left[\int \frac{1}{t^2}\,dt\right]_{t=\cos x} = \tan x - \left[\frac{1}{t}\right]_{t=\cos x} + C = \tan x - \frac{1}{\cos x} + C$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.

b. L'integrale richiesto è dato da

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)\,dx + 2\int_1^2 (x-1)\,dx = \frac{1}{2}\,.$$