

- Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
 2. Consegnare ANCHE questo foglio.
 3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
 4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
 5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

1. a. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \tan x) - 3x}{\sin x}.$$

- b. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right).$$

SOLUZIONE. a. Il numeratore può essere scritto come segue: $\log(1 - \tan x) - 3x = -\tan x - 3x + g(x)$, dove g è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\tan x$. Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \tan x) - 3x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x - 3x + g(x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{\cos x} - 3 \frac{x}{\sin x} + \frac{g(x)}{\tan x} \frac{1}{\cos x} \right) = -4.$$

- b. Moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{x^2 + 2x} + x$: si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + 2/x} + 1} = 1.$$

2. Si consideri la funzione definita da $f(x) = x \log^2 x$.

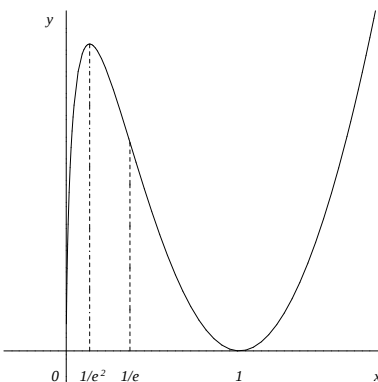
- a. Determinare il dominio di f , studiare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti.
- b. Determinare gli intervalli di monotonia della f e gli eventuali minimi e massimi relativi.
- c. Studiare la convessità di f .
- d. Disegnare il grafico di f .

SOLUZIONE.

- a. La funzione è definita in $]0, +\infty[$. Quanto ai limiti si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty :$$

il secondo limite è immediato, per il primo basta applicare due volte il teorema di De l'Hôpital dopo aver trasformato la forma indeterminata in ∞/∞ . Pertanto, la retta $x = 0$ è un asintoto verticale per $x \rightarrow 0^+$; non vi sono asintoti obliqui $x \rightarrow +\infty$, poiché



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log^2(x) = +\infty.$$

- b. Si ha

$$f'(x) = \log x (\log x + 2)$$

che si annulla per $x = 1$ e per $x = e^{-2}$, è strettamente positiva (e quindi f cresce) in $]0, e^{-2}[$ e in $]1, +\infty[$, è strettamente negativa (e quindi f decresce) in $]e^{-2}, 1[$. Pertanto, $x = e^{-2}$ è un punto di massimo relativo (non assoluto, poiché f è illimitata superiormente) e $x = 1$ è un punto di minimo relativo (anzi assoluto, poiché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in]0, +\infty[$).

- c. Si ha

$$f''(x) = \frac{2}{x} (\log x + 1)$$

che si annulla per $x = e^{-1}$, è strettamente positiva (e quindi f è convessa) in $]e^{-1}, +\infty[$, è strettamente negativa (e quindi f è concava) in $]0, e^{-1}[$. Pertanto, $x = e^{-1}$ è un punto di flesso.

d. Il grafico è riportato in figura.

3. Calcolare il seguente integrale $\int_2^4 \frac{1}{x \log^2 x} dx$.

SOLUZIONE. Effettuando la sostituzione $t = \log x$, da cui $dt = (1/x) dx$, si ha

$$\int_2^4 \frac{1}{x \log^2 x} dx = \int_{\log 2}^{\log 4} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 4} = -\frac{1}{2 \log 2} .$$