Prova scritta di Calcolo I. Alessandria, 12 settembre 2007

..........................................................................................................
Cognome e nome | Firma | Corso di laurea

1. a. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

b. Si calcoli, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x\to +\infty} x^\alpha \sin\frac{1}{x}.$$

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) := \sqrt{x^2+1} - |x|.$$

a. Determinare il dominio di $f$ e studiare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti.

b. Determinare gli intervalli di monotonia di $f$ e gli eventuali minimi e massimi relativi. Dire se $f$ ha punti di non derivabilità.

c. Studiare la convessità di $f$.

d. Disegnare il grafico di $f$.

3. a. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

b. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^2 |x(1-x)|\,dx.$$

# Soluzioni

1. a. Osserviamo che $\cos x \sim 1-x^2/2$ per $x \to 0$ e $\log(1-x^2/2) \sim -x^2/2$ per $x \to 0$, da cui si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare anche con il teorema di de L'Hopital.

b. Siccome $\sin(1/x) \sim 1/x$ per $x \to +\infty$ si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{1}{x} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha < 1 \end{cases}.$$

2. Data

$$f(x) := \sqrt{x^2+1} - |x|.$$

a. Il dominio di $f$ è tutto $\mathbb{R}$.
Osserviamo che $f$ è pari e quindi possiamo limitarci a studiare la funzione su $[0, +\infty)$ e poi ragionare per simmetria.
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

e quindi per simmetria anche

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

La retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per la funzione $f$ in $+\infty$ e in $-\infty$. Osserviamo anche che $f(0) = 1$.

b. Denotiamo con $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la restrizione di $f$ a $[0, +\infty)$. Si ha

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

Siccome $x < \sqrt{x^2+1}$ si ha $g'(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Quindi $f$ è decrescente su $[0, +\infty)$ e per simmetria crescente su $(-\infty, 0]$. Dal segno della derivata e dalla continuità di $f$ in 0 ne segue che 0 è

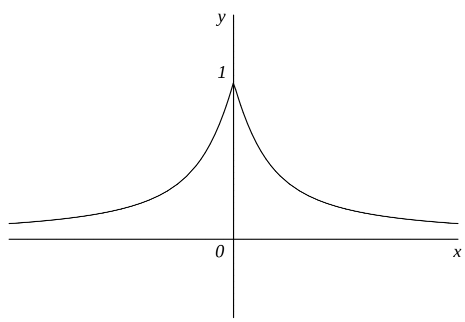
punto di massimo di $f$. Il minimo di $f$ non esiste in quanto $f > 0$ e $f$ ha limite 0 in $\pm\infty$.
In 0 la $f$ non è derivabile in quanto la derivata destra vale $-1$ e la derivata sinistra vale 1.

c. Si ha

$$g''(x) = 1 - \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

Siccome $(x^2+1)^{3/2} > x^2$ si ottiene $g''(x) > 0$ su $(0, +\infty)$. Quindi $f$ è convessa su $(0, +\infty)$ e per simmetria anche in $(-\infty, 0)$. Osserviamo che $f$ non è convessa globalmente.

d. Il grafico di $f$ è il seguente:




3. a. Siccome

$$\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

si ha

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx = x - \int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx.$$

Mediante la sostituzione $t = \sqrt{x}$ si ottiene

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{2t}{1+t}\, dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = 2t - 2\log(1+t) + c$$

e quindi

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx = x - 2\sqrt{x} + 2\log(\sqrt{x}+1) + c.$$

b. Osserviamo che $x(1-x) > 0$ su $(0,1)$ e $x(1-x) < 0$ su $(1,2)$. Quindi, per la definizione di valore assoluto,

$$\int_0^2 |x(1-x)|\,dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx + \int_1^2 x(x-1)\,dx.$$

Con semplici calcoli si vede che

$$\int_0^2 |x(1-x)|\,dx = 1.$$