Prova scritta di Calcolo I. Alessandria, 13 dicembre 2007

....

Cognome e nome Firma Corso di laurea

1. a. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x - x^2}{2\cos x + x^2 - 2}.$$

b. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1 - e^{-x^3}}{x^3} + \frac{\arctan x^2}{3x} + \cos(2x - 2\pi) \right).$$

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) := x^x.$$

a. Determinare il dominio massimale di f, studiare i limiti agli estremi del dominio e determinare gli eventuali asintoti.

b. Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali minimi e massimi relativi. Dire se la funzione è inferiormente limitata, superiormente limitata, limitata.

c. Studiare la convessità di f.

d. Disegnare il grafico di f.

e. Dire se f è prolungabile a una funzione continua definita su tutto $\mathbb{R}$. Se la risposta è negativa, motivarla; se la risposta è affermativa, fornire un esempio.

f. Dire se f è prolungabile a una funzione derivabile definita su tutto $\mathbb{R}$. Se la risposta è negativa, motivarla; se la risposta è affermativa, fornire un esempio.

g. Dire quale è il dominio massimale di $g(x) = f(|x|)$. Disegnare il grafico di g.

3. a. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{1 + e^x}\, dx.$$

b. Sia f definita da

$$f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } x \leq 1 \\ -3x^{-4} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Calcolare

$$\int_{-1}^5 f(x)\, dx$$

e

$$\int_{-1}^5 |f(x)|\, dx.$$

Soluzioni

1. a. Utilizzando la formula di Taylor del seno e del coseno si ha

$$x \sin x - x^2 = x(\sin x - x) = x(-x^3/6 + o(x^3)) = x^4/6 + o(x^4),$$

e

$$2\cos x - 2 + x^2 = x^4/12 + o(x^4)$$

per $x \to 0$.
Quindi si ottiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - x^2}{2\cos x + x^2 - 2} = -2.$$

b. Per il limite notevole $\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ si ottiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{-x^3}}{x^3} = 1.$$

Per il limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ si ottiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x^2}{3x} = 0$$

e per la continuità del coseno si ha $\lim_{x\to 0}\cos(2x-2\pi)=1$. Di conseguenza

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1-e^{-x^3}}{x^3}+\frac{\arctan x^2}{3x}+\cos(2x-2\pi)\Big)=1+0+1=2.$$

2. a. Le potenze reali di base reale sono definite per valori positivi della base, pertanto il dominio massimale di f è l'intervallo $(0,+\infty)$. La f si può riscrivere nel seguente modo

$$f(x)=e^{x\log x}.$$

Siccome $\lim_{x\to 0} x\log x=0$, per la continuità dell'esponenziale si ottiene $\lim_{x\to 0} f(x)=e^0=1$. Si vede subito che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Siccome $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x=+\infty$ non ci sono asintoti obliqui.

b. La derivata di f ha l'espressione

$$f'(x)=e^{x\log x}(\log x+1).$$

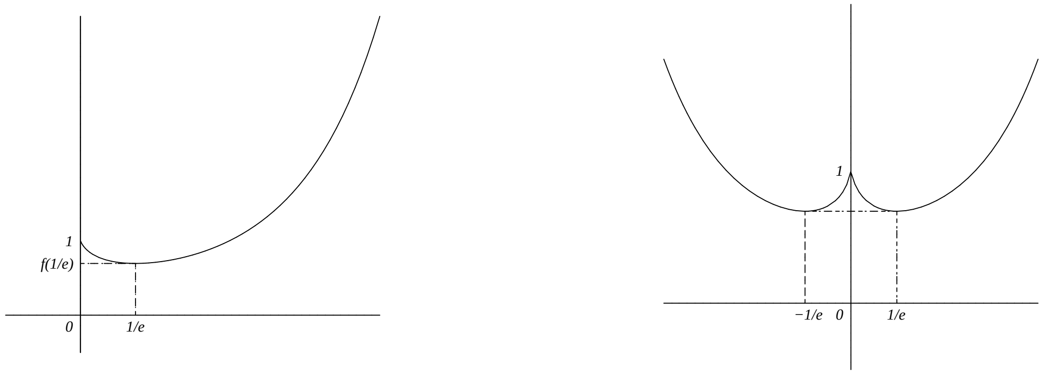
Pertanto $f'<0$ in $(0,e^{-1})$, $f'(e^{-1})=0$ e $f'>0$ in $(e^{-1},+\infty)$. Quindi fè decrescente su $(0,e^{-1})$, mentre è crescente su $(e^{-1},+\infty)$. f ha un unico minimo relativo che è anche assoluto in e^{-1}. f non ha massimi relativi in quanto è definita su un intervallo aperto, è derivabile e non ci sono altri punti stazionari. f è limitata inferiormente in quanto $f(x)\ge f(e^{-1})$ per ogni $x\in(0,+\infty)$. f è superiormente illimitata, per quanto visto al punto [a.], e quindi non è limitata.

c. La derivata seconda ha l'espressione

$$f''(x)=e^{x\log x}\big((\log x+1)^2+1/x\big).$$

Quindi $f''(x)>0$ per ogni $x\in(0,+\infty)$, da cui segue che f è una funzione convessa.

d. Il grafico di f è riportato in figura (a sinistra).



3. e. Siccome $\lim_{x\to 0} f(x)$ esiste finito, f è prolungabile a una funzione continua definita su tutto $\mathbb{R}$. Un esempio è fornito dalla funzione $\bar{f}$ definita da

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ f(x) & \text{se } x > 0 \end{cases} .$$

f. f non è prolungabile a una funzione derivabile definita su tutto $\mathbb{R}$. Difatti se esistesse $\tilde{f}$ prolungamento derivabile di f, necessariamente $\tilde{f}(0) = 1$ per continuità. Allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$$

che implica $\tilde{f}$ non derivabile in 0, e questo è assurdo.

g. Il dominio massimale di g è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il grafico di g si ottiene per simmetria dal grafico di f. Il grafico di g è riportato in figura (a destra).

4. a. Con la sostituzione $e^x = t$ si ottiene

$$\int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{1 + e^x}\, dx = \int_1^e \frac{t^2 + 1}{t^2(t + 1)}\, dt.$$

Siccome la funzione integranda si decompone nel seguente modo

$$\frac{t^2 + 1}{t^2(t + 1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{2}{t + 1},$$

si ha

$$\int_1^e \frac{t^2 + 1}{t^2(t + 1)}\, dt = [-\frac{1}{t} - \log t + 2\log(t+1)]\big|_1^e = 2\log(e+1) - 2\log 2 - \frac{1}{e}.$$

b. Siccome

$$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -3\int_{-1}^{1} 1\,dx = -6,$$

$$\int_{1}^{5} f(x)\,dx = -3\int_{1}^{5} x^{-4}\,dx = x^{-3}|_{1}^{5} = 5^{-3} - 1,$$

si ottiene

$$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = -7 + 5^{-3}.$$

Osservando che la f è negativa si ottiene immediatamente

$$\int_{-1}^{5} |f(x)|\,dx = -\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 7 - 5^{-3}.$$