Prova scritta di Calcolo I. Alessandria, 17 marzo 2008

....

Cognome e nome Firma Corso di laurea

1. a. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \log(1+\sin(2x))}{\sin x^2}.$$

b. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to +\infty} (1+x^{-1/2})^{\sqrt{x}}.$$

Si calcoli al variare di α in $\mathbb{R}$ il seguente limite

$$\lim_{x\to +\infty} (1+x^{\alpha})^{\sqrt{x}}.$$

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) := \frac{x^2}{|x|-1} e^{|x|-1}.$$

a. Determinare l'insieme di definizione di f, studiare i limiti agli estremi del dominio. Determinare gli eventuali asintoti di f.

b. Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali minimi e massimi relativi. Dire se f ammette massimi e/o minimi assoluti.

c. Disegnare il grafico di f trascurando lo studio della convessità di f.

d. Disegnare il grafico di $g(x) = f(x+2)$.

3. a. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int (x+1) \arctan(x-1)\, dx.$$

b. Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Soluzioni

1. a. Ricordando che $\sin x \sim x$ per $x \to 0$ e $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \log(1+\sin(2x))}{\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

   b. Il primo limite è un caso particolare del secondo con $\alpha = -1/2$. Studiamo quindi solo il secondo limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Se $\alpha \geq 0$ è ovvio che il limite vale $+\infty$.
   Per $\alpha < 0$ usiamo l'identità $(1+x^\alpha)^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\log(1+x^\alpha)}$. Siccome $\log(1+x^\alpha) \sim x^\alpha$ per $x \to +\infty$, si ottiene che il limite vale $+\infty$ per $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, vale e per $\alpha = -\frac{1}{2}$, vale 1 per $\alpha < -\frac{1}{2}$.

2. $$f(x) := \frac{x^2}{|x|-1} e^{|x|-1}.$$

   a. f è definita per $|x| \neq 1$, cioè in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Osserviamo che f è pari, quindi possiamo limitarci allo studio su $[0,1) \cup (1, +\infty)$. Si ha che $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, da cui si deduce che in $x = 1$ c'è un asintoto verticale. Inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ e quindi non ci sono asintoti obliqui.

   b. La derivata prima di f per $x \geq 0$ è

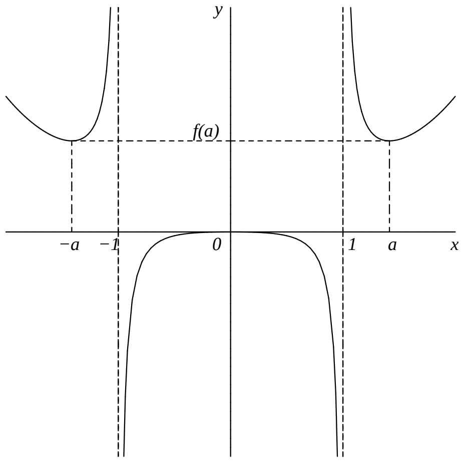
$$f'(x) = \frac{xe^{x-1}(x^2-2)}{(x-1)^2}.$$

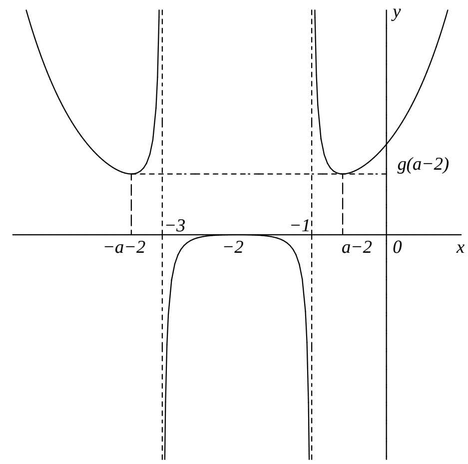
   Si vede che f' è negativa per $0 < x < \sqrt{2}$, è nulla per $x = \sqrt{2}$ e per $x = 0$ ed è positiva per $x > \sqrt{2}$. Ne segue che f è decrescente su $(0,1)$ e ha un massimo relativo in $x = 0$, è decrescente su $(1, \sqrt{2})$, ha un minimo relativo in $\sqrt{2}$ ed è crescente su $(\sqrt{2}, +\infty)$.

   Per quanto visto al punto [a.] f non è limitata inferiormente e superiormente. Quindi non può avere massimi o minimi assoluti.

   c. Il grafico di f è rappresentato nella figura di sinistra, in cui si è posto $a = \sqrt{2}$.

   d. Il grafico di g si ottiene per traslazione del grafico di f ed è rappresentato nella figura di destra, sempre con $a = \sqrt{2}$.





3. a. Con la sostituzione $y = x - 1$ si ha

$$\int (x+1)\arctan(x-1)\,dx = \int (y+2)\arctan y\,dy.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int \arctan y\,dy = y\arctan y - \frac{1}{2}\log(1+y^2) + c,$$

mentre, sempre integrando per parti,

$$\int y\arctan y\,dy = \frac{1}{2}y^2\arctan y - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\arctan y + c.$$

Quindi

$$\int (y+2)\arctan y\,dy = \frac{1}{2}(y^2+4y+1)\arctan y - \frac{1}{2}y - \log(1+y^2) + c.$$

Ritornando alla variabile x si ha

$$\int (x+1)\arctan(x-1)\,dx = \frac{1}{2}(x^2+2x-2)\arctan(x-1) - \frac{1}{2}(x-1) - \log(1+(x-1)^2) + c.$$

b. Con la sostituzione $x^2 = t$ si ottiene

$$\int_0^{1/2} \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{1/4} \frac{3}{2\sqrt{1-t}}\,dt = (-3\sqrt{1-t})\Big|_0^{1/4} = 3(1-\sqrt{3}/2).$$