Prova scritta di Calcolo I. Alessandria, 2 aprile 2008

....

Cognome e nome Firma Corso di laurea

1. a. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^4(x-1)}{(\cos(x-1)-1)^2}.$$

   b. Si calcoli al variare di α in $\mathbb{R}$ il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{\alpha x+2}\right),$$

   precisando per quali valori di α ha senso calcolarlo.

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) := x^2 + x + \log(1-x).$$

   a. Determinare l'insieme di definizione di f, studiare i limiti agli estremi del dominio. Determinare gli eventuali asintoti di f.
   b. Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali minimi e massimi relativi. Dire se f ammette massimi e/o minimi assoluti.
   c. Studiare la convessità di f.
   d. Disegnare il grafico di f.
   e. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f negli eventuali punti di flesso.

3. a. Scrivere esplicitamente

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,$$

   dove f è la funzione dell'esercizio 2.

   b. Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 x^3 e^{-x^2}\,dx.$$

Soluzioni

1. a. Ricordando che per $y \to 0$ si ha $\sin y \sim y$ e $\cos y - 1 \sim -y^2/2$ si ottiene

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin^4(x-1)}{(\cos(x-1)-1)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin^4 y}{(\cos y - 1)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{(-y^2/2)^2} = 4.$$

   b. Il calcolo del limite ha senso solo per $\alpha \geq 0$ in quanto $\sqrt{\alpha x + 2}$ non è definita per $\alpha < 0$ e x sufficentemente grande. Osservando che

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{\alpha x + 2} &= \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{\alpha x + 2}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\alpha x + 2}\right)}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\alpha x + 2}\right)} \\ &= \frac{(1-\alpha)x - 1}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\alpha x + 2}\right)}\end{aligned}$$

   si deduce che

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{\alpha x + 2}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 \leq \alpha < 1 \\ 0 & \text{se } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}.$$

2. a. L'insieme di definizione di f è l'intervallo $(-\infty, 1)$, (in cui è definito $\log(1-x)$).
   Si ha

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty.$$

   Siccome $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, è escluso che ci sia l'asintoto obliquo in $-\infty$. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

   e quindi c'è l'asintoto verticale in 1.

   b. La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{x(1-2x)}{1-x}$$

definita ovviamente su $(-\infty, 1)$.
Il segno di f' coincide col segno del numeratore di f' e quindi si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $0 < x < 1/2$, $f'(x) < 0$ se e solo se $x < 0$ oppure $1/2 < x < 1$, $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $x = 1/2$. Ne segue che f è decrescente su $(-\infty, 0)$, ha un minimo relativo in 0, è crescente su $(0, 1/2)$, ha un massimo relativo in $1/2$, è decrescente su $(1/2, 1)$.

f non ammette massimi assoluti in quanto non è superiomente limitata e, analogamente, non ammette minimi assoluti in quanto non è inferiomente limitata.

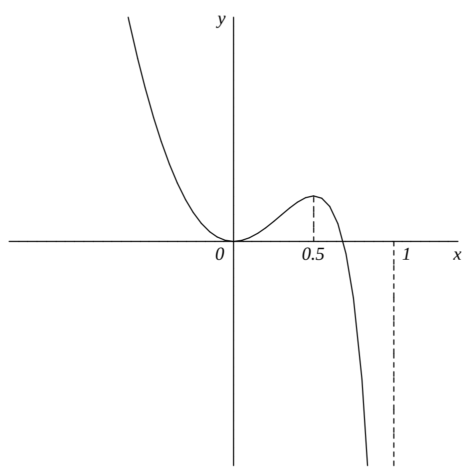
c. La derivata seconda di f è

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2}$$

definita ovviamente su $(-\infty, 1)$.
Il segno di f'' coincide col segno del numeratore di f'' e quindi si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x < 1 - 1/\sqrt{2}$, $f''(x) < 0$ se e solo se $1 - 1/\sqrt{2} < x < 1$, $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 1 - 1/\sqrt{2}$.

Quindi f è convessa su $(-\infty, 1 - 1/\sqrt{2})$, ha un flesso in $1 - 1/\sqrt{2}$, è concava su $(1 - 1/\sqrt{2}, 1)$.

d. Il grafico di f è riportato in figura.



e. L'unico punto di flesso è $x_0 := 1 - 1/\sqrt{2}$. L'equazione della retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Si calcola $f'(x_0) = 3 - 2\sqrt{2}$, e $f(x_0) = \frac{1}{2}(5 - 3\sqrt{2} - \log(2))$, che forniscono quindi

$$y = \frac{1}{2}(5 - 3\sqrt{2} - \log(2)) + (3 - 2\sqrt{2})\Big(x - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

3. a. Calcoliamo prima $\int_0^x \log(1-t)\,dt$. Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^x \log(1-t)\,dt &= t\log(1-t)|_0^x + \int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt \\ &= x\log(1-x) + \int_0^x \Big(-1 + \frac{1}{1-t}\Big)\,dt \\ &= x\log(1-x) + (-t - \log(1-t))|_0^x \\ &= (x-1)\log(1-x) - x.\end{aligned}$$

Quindi

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = x^3/3 + x^2/2 - x + (x-1)\log(1-x).$$

b. Facendo la sostituzione $t = x^2$ ci si riconduce al calcolo di

$$\int_1^2 x^3 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 te^{-t}\,dt.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int_1^4 te^{-t}\,dt = -te^{-t}|_1^4 + \int_1^4 e^{-t}\,dt = -(t+1)e^{-t}|_1^4 = -5e^{-4} + 2e^{-1}.$$

In definitiva

$$\int_1^2 x^3 e^{-x^2}\,dx = -\frac{5}{2}e^{-4} + e^{-1}.$$