Prova scritta di Calcolo I. Alessandria, 3 luglio 2008

....

Cognome e nome   Firma   Corso di laurea

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

   a. Si calcoli il
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+ax)}{\sin(bx)}.$$

   b. Si calcoli al variare di α in $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ il
   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+ax^\alpha)}{\sin(bx)}.$$

2. Si consideri la funzione definita da
$$f(x) := \sqrt{x}\Big(1 + \frac{1}{\log x}\Big).$$

   a. Determinare l'insieme di definizione di f, studiare i limiti agli estremi del dominio. Determinare gli eventuali asintoti di f.

   b. Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali minimi e massimi relativi. Dire se f ammette massimi e/o minimi assoluti.

   c. Disegnare il grafico di f e il grafico di $|f|$.
   (Si può trascurare lo studio della convessità)

   d. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto corrispondente a $x = 1/e$. Esiste la retta tangente al grafico di $|f|$ nello stesso punto?

3. a. Calcolare
   $$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}\, dx.$$

   b. Calcolare l'integrale indefinito
   $$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}\, dx.$$

SOLUZIONE

1. a. Se $a = 0$, allora il numeratore è la costante nulla, quindi il limite vale 0. Se $a \neq 0$, allora si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+ax)}{ax} \, \frac{bx}{\sin(bx)} \, \frac{ax}{bx} \ :$$

grazie ai limiti notevoli relativi al logaritmo e al seno, la prima e la seconda frazione tendono a 1 per $x \to 0$, mentre la terza tende ad a/b, che è quindi il valore del limite richiesto. Si osservi che la formula finale ingloba anche il caso $a = 0$.

   b. Con passaggi analoghi a quelli del punto a, si trova

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+ax^\alpha)}{\sin(bx)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{ax^\alpha}{bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \to 0} x^{\alpha-1},$$

pertanto il limite richiesto vale 0, se $a = 0$ oppure $\alpha > 1$; $+\infty$, se $\alpha < 1$ e $a/b > 0$; $-\infty$, se $\alpha < 1$ e $a/b < 0$; a/b, se $\alpha = 1$.

2. a. Le condizioni da imporre sono $x > 0$ e $1 \log x \neq 0$, quindi l'insieme di definizione risulta $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$. La funzione si annulla per $x = 1/e$; inoltre si ha

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

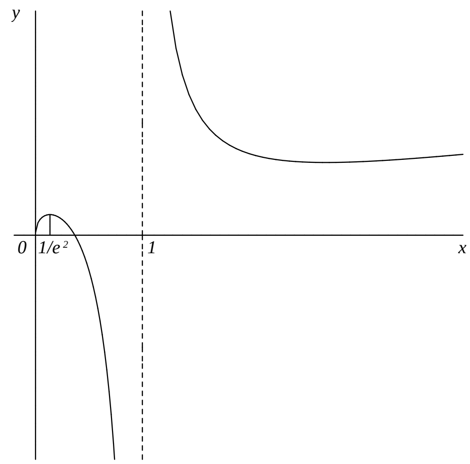
Pertanto, $x = 1$ è un asintoto verticale; non vi sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$, perché la funzione tende a $+\infty$ come $\sqrt{x}$.

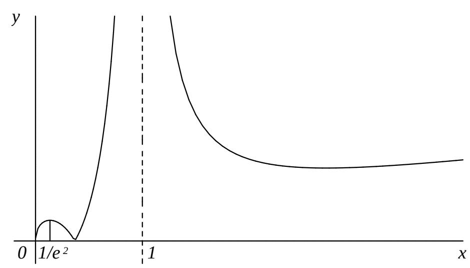
   b. La funzione f è derivabile in D e la sua derivata vale

$$f'(x) = \frac{\log^2 x + \log x - 2}{2\sqrt{x} \log^2 x},$$

che è positiva se e solo se, posto $y = \log x$, $y^2 + y - 2 > 0$ che equivale a $y < -2$ o $y > 1$: in termini della variabile $x = e^y$, ciò equivale a $x < 1/e^2$ o $x > e$, ovviamente con $x \in D$. Per concludere, f è crescente in $]0, 1/e^2[$ e in $]e, +\infty[$, decrescente in $]1/e^2, 1[$ e in $]1, e[$; in particolare $1/e^2$ è un punto di massimo relativo, e è un punto di minimo relativo, non vi sono né massimo né minimo assoluto per la illimitatezza della funzione.

c. Grafico della funzione f (sopra) e di $|f|$ (sotto).





d. Ricordando che $f(1/e) = 0$, la retta tangente al grafico di f in $(1/e, f(1/e))$ ha equazione $y = -\sqrt{e}(x - 1/e)$. Non esiste la retta tangente al grafico di $|f|$ in $(1/e, |f|(1/e))$, poiché $|f|$ non è derivabile in $1/e$.

3. a.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx + \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx :$$

il primo integrale si calcola mediante la sostituzione $y = \cos x$, da cui $dy = -\sin x\ dx$ e

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\ dx = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{y^2}\ dy = \frac{1}{y}\Big|_1^{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2} - 1.$$

Inoltre

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan x\Big|_0^{\pi/4} = 1,$$

pertanto l'integrale richiesto vale $\sqrt{2}$.

b. Con la sostituzione $y = \sqrt{e^{2x}+1}$, da cui $dx = (y/(y^2-1))\ dy$, l'integrale indefinito richiesto diventa

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}\, dx = \int \frac{1}{y^2-1}\ dy = \int \frac{1-y+y}{y^2-1}\ dy =$$
$$-\int \frac{1}{y+1}\ dy + \int \frac{y}{y^2-1}\ dy = -\log(y+1) + \frac{1}{2}\log(y^2-1) =$$
$$-\log(\sqrt{e^{2x}+1}+1) + x + C,$$

al variare di C in $\mathbb{R}$.