Prova scritta di Calcolo I. Alessandria, 30 luglio 2008

....

Cognome e nome Firma Corso di laurea

1. Si calcoli, se esiste, il

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{3(x-1)^2}-1}{\sqrt{x^2+3}\,\sin(x^2-1)\tan(x-1)}.$$

2. Si consideri la funzione definita da

$$f(x) := |x+1|e^x.$$

   a. Determinare l'insieme di definizione di f, studiare i limiti agli estremi del dominio. Determinare gli eventuali asintoti di f.
   b. Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali minimi e massimi relativi. Dire se f ammette massimi e/o minimi assoluti.
   c. Dire se f presenta qualche punto di non derivabilità.
   d. Determinare gli intervalli di convessità e di concavità di f.
   e. Disegnare il grafico di f.

3. Calcolare

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

e

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx,$$

dove f è la funzione dell' esercizio 2.

SOLUZIONE

1. Effettuando la sostituzione $y = x - 1$ si ha $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = y(y+2)$ e il limite richiesto diventa

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^{3y^2} - 1}{\sqrt{(y+1)^2+3}\sin y(y+2)\tan y} =$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\sqrt{(y+1)^2+3}} \frac{e^{3y^2}-1}{3y^2} \frac{y(y+2)}{\sin y(y+2)} \frac{y}{\sin y} \frac{3y^2\cos y}{y(y+2)\; y} :$$

Grazie ai limiti notevoli relativi all'esponenziale e al seno, la seconda, la terza e la quarta frazione tendono a 1 per $y \to 0$, mentre la quinta tende a $3/2$; infine, la prima frazione tende a $1/2$, pertanto il limite richiesto vale $3/4$.

2. Può essere utile riscrivere la funzione come segue:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^x, & x \geq -1, \\ -(x+1)e^x, & x < -1. \end{cases}$$

Inoltre, si ha $f(x) = |g(x)|$, dove $g(x) = (x+1)e^x$.

   a. La funzione f è definita in $\mathbb{R}$ e si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

   Pertanto, $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$; non vi sono asintoti obliqui per $x \to +\infty$ poiché la funzione tende a $+\infty$ più velocemente di e^x.

   b. La funzione g è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ e la sua derivata vale

$$g'(x) = (x+2)e^x,$$

   che è strettamente positiva se e solo se $x > -2$: pertanto, g è crescente in $]-2, +\infty$, decrescente in $]-\infty, -2[$ e ha un minimo (assoluto) in -2. Di conseguenza f (che coincide con $|g|$) è crescente in $]-\infty, -2[$ e in $]-1, +\infty$, decrescente in $]-2, -1[$, ha un massimo (relativo) in -2 e un minimo (assoluto) in -1. Non vi è massimo assoluto, poiché f è superiormente illimitata.

c. La funzione f è derivabile in ogni $x \neq -1$, con derivata

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)e^x, & x > -1, \\ -(x+2)e^x, & x < -1. \end{cases}$$

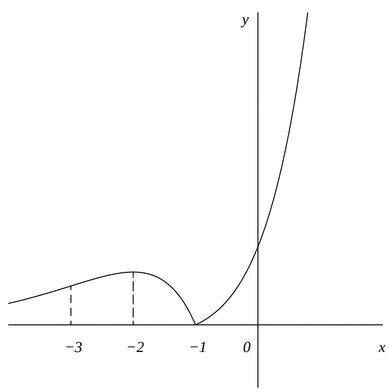
f non è derivabile in -1 poiché la derivata destra e la derivata sinistra in -1 valgono rispettivamente $1/e$ e $-1/e$.

d. La funzione g' è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$ e la sua derivata vale

$$g''(x) = (x+3)e^x,$$

che è strettamente positiva se e solo se $x > -3$: pertanto, g è convessa in $]-3, +\infty$, concava in $]-\infty, -3[$ e ha un flesso in -3. Di conseguenza f (che coincide con $|g|$) è convessa in $]-\infty, -3[$ e in $]-1, +\infty$, concava in $]-3, -1[$ e ha un flesso in -3.

e. Grafico della funzione f.



3. La funzione f è continua in $\mathbb{R}$: ricordando la distinzione di casi fatta all'inizio della soluzione dell'esecizio 2 e integrando per parti si ha

$$\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} (x+1)e^x\, dx = \int_{-1}^{0} (xe^x + e^x)\, dx =$$
$$xe^x\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^x\, dx + \int_{-1}^{0} e^x\, dx = \frac{1}{e}\,,$$

mentre, utilizzando il risultato appena trovato,

$$\int_{-3}^{0} f(x)\, dx = -\int_{-3}^{-1} (x+1)e^x\, dx + \int_{-1}^{0} (x+1)e^x\, dx =$$

$$-\int_{-3}^{-1} (xe^x + e^x)\, dx + \frac{1}{e} = -xe^x\Big|_{-3}^{-1} + \int_{-3}^{-1} e^x\, dx - \int_{-3}^{-1} e^x\, dx + \frac{1}{e} = -\frac{3}{e^3} + \frac{2}{e}\ .$$