Prova scritta di Calcolo I. Alessandria, 10 settembre 2008

....

Cognome e nome   Firma   Corso di laurea

1. Si calcoli, se esiste, il
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^3 x}-1}{\log(1-x^3)}.$$

2. Si consideri la funzione definita da
$$f(x):=\frac{\log x}{1+\log x}.$$

   a. Determinare l'insieme di definizione D di f, studiare i limiti di f agli estremi di D. Determinare gli eventuali asintoti di f.
   b. Dire se f si può prolungare ad una funzione continua definita in $D\cup\{0\}$. Dire se f si può prolungare ad una funzione continua definita su $\mathbb{R}$.
   c. Determinare gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali minimi e massimi relativi. Dire se f ammette massimi e/o minimi assoluti.
   d. Dire se f può essere prolungata ad una funzione derivabile definita in $D\cup\{0\}$.
   e. Determinare gli intervalli di convessità e di concavità di f.
   f. Dire se ci sono punti di flesso e, in caso affermativo, calcolare il coefficente angolare della retta tangente al grafico in tali punti.
   g. Disegnare il grafico qualitativo di f tenendo presente tutte le informazioni ottenute nei punti precedenti.

3. a. Posto
$$g(x)=\begin{cases} x\log x, & x>0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$
determinare tutte le primitive di g.

b. Verificare se esiste $b > 0$ tale che

$$\int_1^b g(x)\,dx = 10.$$

SOLUZIONE

1. Si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin^3 x} - 1}{\log(1 - x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin^3 x} - 1}{\sin^3 x} \frac{-x^3}{\log(1 - x^3)} \frac{\sin^3 x}{-x^3}.$$
Grazie ai limiti notevoli relativi all'esponenziale, al logaritmo e al seno, la prima e la seconda frazione tendono a 1 per $x \to 0$, mentre la terza tende a -1, che è quindi il valore del limite richiesto.

2. Può essere utile riscrivere la funzione come segue:
$$f(x) = \frac{\log x}{1 + \log x} = 1 - \frac{1}{1 + \log x}.$$

   a. Le condizioni da imporre sono $x > 0$ e $1+\log x \neq 0$, quindi risulta $D =]0, 1/e[\cup]1/e, +\infty[$. Utilizzando la riscrittura della funzione, si trova subito
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to(1/e)^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to(1/e)^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$
   Pertanto, $x = 1/e$ è un asintoto verticale e $y = 1$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

   b. La funzione
   $$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$
   è un prolungamento (l'unico possibile) di f a $D\cup\{0\}$. Non esistono prolungamenti a $\mathbb{R}$ che siano continui, a causa dell'illimitatezza vicino a $1/e$.

   c. La funzione f è derivabile in D e la sua derivata vale
   $$f'(x) = \frac{1}{x(1 + \log x)^2},$$

che è strettamente positiva in D. Dunque, f è crescente in $]0, 1/e[$ e in $]1/e, +\infty[$, in particolare non vi sono minimi o massimi relativi o assoluti.

d. L'eventuale prolungamento richiesto deve essere anche continuo, quindi se esiste deve essere la funzione F di cui al punto b. Tuttavia, risulta

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty,$$

quindi per il teorema di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = +\infty,$$

dunque F non è derivabile in 0, ossia non esiste il prolungamento di f richiesto.

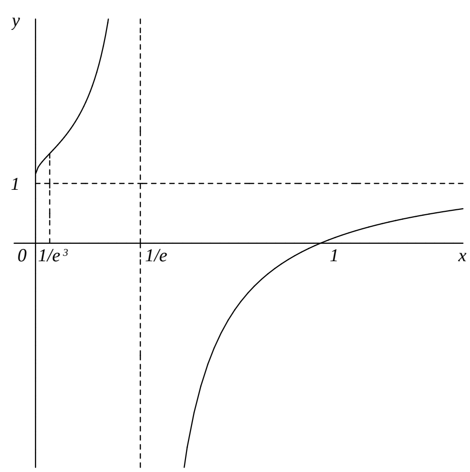
e. La funzione f' è derivabile in D e la sua derivata vale

$$f''(x) = -\frac{3 + \log x}{x^2(1 + \log x)^3},$$

che è strettamente positiva in $]1/e^3, 1/e[$ e negativa altrove in D. Dunque, f è convessa in $]1/e^3, 1/e[$, concava in $]0, 1/e^3[$ e in $]1/e, +\infty[$.

f. Da quanto visto nel punto precedente scende in particolare che $1/e^3$ è un punto di flesso; il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in $(1/e^3, f(1/e^3))$ è $f'(1/e^3) = e^3/4$.

g. Grafico della funzione f.



3. a. La funzione g è continua in $[0, +\infty[$: per il teorema di Torricelli, una sua primitiva in $[0, +\infty[$ è

$$G_c(x) = \int_c^x g(t)\ dt,$$

per ogni $c \in [0, +\infty[$; inoltre ogni altra primitiva è data da $G_c + K$, al variare di $K \in \mathbb{R}$. Ad esempio, se $c = 1$ allora integrando per parti si ha

$$G_1(x) = \frac{t^2}{2} \log t \,\Big|_1^x - \int_1^x \frac{t}{2}\ dt = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x^2}{2}(\log x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}\ ,$$

per ogni $x \in]0, +\infty[$. Infine, osservato che G_1 è prolungabile per continuità in 0, con valore $1/4$, che questo prolungamento è derivabile e che per il teorema di De l'Hôpital $G_1'(0) = 0 = g(0)$, si deduce che G_1 è una primitiva di g in *tutto* $[0, +\infty[$ e ogni altra primitiva si ottiene da lei aggiungendo una costante arbitraria.

b. Per quanto visto nel punto precedente, la funzione

$$G_1(x) = \int_1^x g(t)\, dt, \qquad x \geq 1,$$

è una primitiva di g in $[1, +\infty[$. Poiché per definizione $G_1'(x) = g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [1, +\infty[$, risulta che G_1 è monotona non decrescente (in realtà, strettamente crescente) in $[1, +\infty[$, inoltre è continua e, come si vede subito, soddisfa

$$\lim_{x \to +\infty} G_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2}(\log x - \frac{1}{2}) = +\infty.$$

Per il teorema dei valori intermedi, per ogni $y > G_1(1) = 0$ esiste $b > 0$ tale che $G_1(b) = y$, da cui la tesi se $y = 10$.