. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Cognome e nome | firma | Corso di Laurea (F,M) | Anno (primo, altro)

---

Analisi Matematica I — CALCOLO 2A — 19 giugno 2001

---

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

**1.** Data la funzione

$$\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\ ,$$

determinarne il campo di esistenza e il limite per $(x, y) \to (0, 0)$.

---

**2.** Data la funzione

$$\frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{xy-1}\ ,$$

determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo nel piano cartesiano $x, y$; determinare il limite per $(x, y) \to (0, 0)$.

---

**3.** Data la funzione

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\ ,$$

a) determinarne il campo di esistenza e calcolare le derivate parziali del primo e secondo ordine;
b) determinare i punti critici (ossia, quelli che annullano il gradiente) e rappresentarli nel piano cartesiano $x, y$.

---

**4.** Data la funzione

$$g(x, y) = \frac{x^2}{y^2 - 2xy}\ ,$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo nel piano cartesiano $x, y$; calcolare le derivate parziali del primo e secondo ordine;
b) determinare i punti critici e rappresentarli nel piano cartesiano $x, y$;
c) determinare gli insiemi di livello e rappresentarli nel piano cartesiano $x, y$ (suggerimento: cercare di scrivere il denominatore come un quadrato, sommando e sottraendo una stessa quantità e avanzando qualcosa ...).

---

**5.** Per ognuna delle tre serie date, indicare se sia convergente, divergente o indeterminata:

$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-3)^n;\qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n;\qquad (c)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)^3$

---

**6.** Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n+1)!}{[n(n-1)]^{n-1}}$

(si rammenta che, per ogni $x \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to+\infty}(1 + x/n)^n = e^x$ ).

---

**7.** Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{y-x+1}}\,dx - \frac{1}{\sqrt{y-x+1}}\,dy,$$

discuterne l'esattezza e in caso positivo trovare una primitiva. Calcolare

$$\int_\phi \omega, \qquad \text{dove} \qquad \phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad t \in [1, 2].$$

**1.** $CE = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; il limite non esiste, perché calcolandolo lungo la retta $y = mx$ si trova il valore $m^2/(1+m^2)^2$.

**2.** $CE = \mathbf{R}^2 \setminus \Big[\{(0,0)\} \cup \{(x,y):\ y = 1/x\}\Big]$; il limite esiste e vale $-1$, perché passando alle coordinate polari la prima frazione diventa $\rho \cos^2\theta \sin^3\theta$, che tende a 0 per $\rho \to 0$, indipendentemente da $\theta$.

**3.**

$$CE = \mathbf{R}^2; \qquad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2+1} - x; \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2+1} - y.$$

I punti critici sono dati dal sistema

$$\begin{cases} x\Big(\dfrac{2}{x^2+y^2+1} - 1\Big) = 0 \\ y\Big(\dfrac{2}{x^2+y^2+1} - 1\Big) = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad x^2+y^2 = 1.$$

Pertanto i punti critici sono l'origine e la circonferenza unitaria di centro l'origine.

**4.** $CE = \{(x,y):\ y \neq 0 \text{ e } y \neq 2x\}$;

$$g_x = \frac{2x(y-x)}{y(y-2x)^2}; \qquad g_y = -\frac{2x^2(y-x)}{y^2(y-2x)^2}\ .$$

I punti critici sono quelli di $CE$ che appartengono all'asse $y$ o alla retta $y = x$. Determiniamo gli insiemi di livello: sia $\lambda \in \mathbf{R}$ e troviamo i punti di $CE$ le cui coordinale risolvono l'equazione $g(x,y) = \lambda$. Si ha

$$\frac{x^2}{y^2 - 2xy + x^2 - x^2} = \lambda, \qquad x^2 = \lambda[(y-x)^2 - x^2], \qquad \lambda(y-x)^2 = (1+\lambda)x^2.$$

L'ultima uguaglianza è possibile solo se $\lambda$ e $1+\lambda$ sono concordi (cioè, $\lambda \leq -1$ oppure $\lambda \geq 0$); se $\lambda = 0$, allora troviamo $x = 0$ e $y$ arbitrario (quindi l'insieme di annullamento coincide con l'asse $y$, come risultava immediatamente dall'espressione di $g$); se $\lambda \neq 0$, allora l'insieme di livello $\lambda$ è costituito dalla coppia di rette passanti per l'origine

$$y = \left(\sqrt{\frac{1}{\lambda} + 1} + 1\right)x, \qquad y = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{\lambda} + 1}\right)x.$$

**5.** (a) divergente; (b) indeterminata; (c) convergente.

**6.** Applichiamo il criterio del rapporto: occorre calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!}{[(n+1)n]^n} \frac{[n(n-1)]^{n-1}}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)!} \frac{[n(n-1)]^{n-1}}{[(n+1)n]^n} = \lim_{n\to+\infty} (n+2)\frac{(n-1)^{n-1}}{n(n+1)^n} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n-1} = 0$$

(l'ultima uguaglianza scende dal fatto che $[1 - 2/(n+1)]^{n-1}$ tende a $e^{-2}$). Dunque, la serie converge.

**7.** Il campo di esistenza $D$ di $\omega$ è il semipiano $\{(x,y):\ y > x - 1\}$ (che è stellato) e $\omega$ è chiusa, quindi è anche esatta. Detta $F$ la primitiva che vale 0 in $(0,0)$, se $(x,y) \in D$ è un punto del primo o del secondo quadrante avremo che $F(x,y)$ è data dall'integrale di $\omega$ lungo la curva ottenuta saldando il segmento che congiunge l'origine a $(0,y)$ con il segmento che congiunge $(0,y)$ a $(x,y)$. I due segmenti in questione hanno nell'ordine le seguenti rappresentazioni

$$\begin{pmatrix} 0 \\ ty \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1] \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} tx \\ y \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

pertanto si ha

$$F(x,y) = \int_0^1 \frac{-y}{\sqrt{ty+1}}\,dt + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{y - tx + 1}}\,dt = -2\Big[\sqrt{ty+1}\Big]_0^1 - 2\Big[\sqrt{y - tx + 1}\Big]_0^1 = -2\sqrt{y - x + 1} + 2.$$

Si verifica facilmente che la formula esprime una primitiva anche nei punti di $D$ che stanno nel terzo e quarto quadrante. Avendo determinato una primitiva, l'integrale curvilineo richiesto lungo $\phi$ è dato dalla differenze dei valori di $F$ agli estremi della curva; in alternativa, si può fare il calcolo diretto:

$$\int_\phi \omega = \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 - t + 1}} - \frac{2t}{\sqrt{t^2 - t + 1}}\right) dt = -\int_1^2 \frac{2t - 1}{\sqrt{t^2 - t + 1}}\,dt = -2\Big[\sqrt{t^2 - t + 1}\Big]_1^2 = -2(\sqrt{3} - 1).$$