. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di Laurea (F,M) | Anno (primo, altro)

Analisi Matematica II — CALCOLO 2A — 17 luglio 2001

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Data la funzione

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \log(e^x - y) \ ,$$

determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo nel piano cartesiano x, y;
determinare il limite per $(x, y) \to (0, 0)$.

---

2. Data la funzione

$$g(x, y) = \log(x^2 y - y) \ ,$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo nel piano cartesiano x, y; calcolare le derivate parziali del primo e secondo ordine;
b) determinare i punti critici e rappresentarli nel piano cartesiano x, y;
c) determinare gli insiemi di livello e rappresentarli nel piano cartesiano x, y.

---

3. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{n+1}}{2^n}$,
(a) stabilire se esistono e quali sono i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge;
(b) se la serie converge, trovare la somma.

---

4. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$, stabilire se converge o no.

---

5. Data la forma differenziale

$$\omega = \left(x^2 - \frac{2x}{y}\right) dx + \left(2 + \frac{x^2}{y^2}\right) dy,$$

discuterne l'esattezza e in caso positivo trovare una primitiva. Calcolare

$$\int_\phi \omega, \qquad \text{dove} \qquad \phi(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1, 1].$$

---

1. $CE = \mathbf{R}^2 \setminus \Big[\{(0,0)\} \cup \{(x,y):\ \ y < e^x\}\Big]$; il limite esiste e vale 0, infatti passando alle coordinate polari la prima frazione diventa $\rho \cos\theta \sin\theta$, che tende a 0 per $\rho \to 0$, indipendentemente da θ; invece, l'argomento del logaritmo tende a 1, quindi il logaritmo tende a 0.

---

2. Il campo di esistenza è dato dalla condizione $y(x^2-1) > 0$, quindi $CE(g) = \{(x,y):\ |x| > 1,\ y > 0\} \cup \{(x,y):\ |x| < 1,\ y < 0\}$

$$g_x = \frac{2x}{x^2-1}\ ; \qquad g_y = \frac{1}{y}\ ; \qquad g_{xx} = -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\ ; \qquad g_{yy} = -\frac{1}{y^2}\ ; \qquad g_{xy} = 0.$$

I punti critici sono dati dal sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 0 \\ g_y(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \text{che non ha soluzione,}$$

pertanto non esistono punti critici. Dato $k \in \mathbb{R}$, l'insieme di livello k è costituito dai punti $(x,y) \in CE(g)$ tali che $g(x,y) = k$, ossia

$$y(x^2-1) = e^k, \qquad \text{da cui} \qquad x \neq \pm 1 \quad \text{e} \quad y = \frac{e^k}{x^2-1}\ .$$

---

3. Dopo aver raccolto in tutti gli addendi il fattore comune β, la serie è evidentemente geometrica con ragione $\beta/2$: pertanto essa converge se e solo se $|\beta| < 2$; se la somma partisse da $n = 0$, allora essa varrebbe $2\beta/(2-\beta)$. Tenedo conto che il primo addendo è quello con $n = 1$, la somma risulta essere $\beta^2/(2-\beta)$.

---

4. La serie è a termini positivi: applicando il criterio del confronto e osservando che il termine generale si comporta, per $n \to +\infty$, come $n^2/n!$, cioè come $1/(n-2)!$, si deduce che la serie converge. Alla stessa conclusione si poteva pervenire utilizzando il criterio ella radice.

---

5. Il campo di esistenza D di ω è $\mathbf{R}^2$ privato dell'asse x. Poniamo $D^+ = \{(x,y):\ \ y > 0\}$ e $D^-\{(x,y):\ \ y < 0\}$: entrambi gli insiemi sono aperti e stellati, inoltre ω è chiusa, quindi è anche esatta in ciascuno dei due insiemi. Determiniamo una primitiva F in D^+: scelto come punto di partenza dell'integrale curvilineo il punto $(0,1)$, se (x,y) è un punto di D^+ avremo che $F(x,y)$ è data dall'integrale di ω lungo la curva ottenuta saldando il segmento che congiunge $(0,1)$ a $(0,y)$ con il segmento che congiunge $(0,y)$ a (x,y). I due segmenti in questione hanno nell'ordine le seguenti rappresentazioni

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 + t(y-1) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1] \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} tx \\ y \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

pertanto si ha

$$F(x,y) = \int_0^1 2(y-1)\,dt + \int_0^1 \Big(t^2x^2 - \frac{2tx}{y}\Big)x\,dt = 2(y-1) + x^3\Big[\frac{t^3}{3}\Big]_0^1 - \frac{x^2}{y}\Big[t^2\Big]_0^1 = 2(y-1) + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{y}.$$

Tutte le altre primitive in D^+ sono date da $F + k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si verifica facilmente che questa formula esprime le primitive anche nei punti di D^-. L'integrale curvilineo richiesto lungo ϕ non ha senso, poiché la curva non è a valori in D.