Cognome e nome | firma | Corso di Laurea (F,M) | Anno (primo, altro)

Analisi Matematica I | CALCOLO 2A | 17 dicembre 2001

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Data la funzione

$$\frac{xy + \sin(xy)}{x^2 + y^2} + \sqrt{1 - x - y},$$

determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y; determinare il limite per $(x, y) \to (0, 0)$.

---

2. Data la funzione

$$f(x, y) = \log(1 + x(x - y)),$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y; b) calcolare le derivate parziali del primo e secondo ordine e trovare i punti critici;
c) determinare gli insiemi di livello e rappresentarli nel piano cartesiano x, y.

---

3. Dimostrare la convergenza e quindi calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!}$.

---

4. Data la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)!}$, stabilire se converge o no, al variare di $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 0$, $x \neq 1/e$.

---

5. Data la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{x + y\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) dx + \left(\frac{y + x\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) dy,$$

(a) discuterne l'esattezza e in caso positivo trovare una primitiva;
(b) calcolare

$$\int_{\phi} \omega, \qquad \text{dove} \qquad \phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t \\ \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, \pi];$$

(c) dedurre il valore dell'integrale

$$\int_{\psi} \omega, \qquad \text{dove} \qquad \psi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t \\ \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [\pi, 2\pi],$$

senza calcolarlo direttamente.

1. Le condizioni da imporre sono $x^2+y^2 \neq 0$ e $1-x-y \geq 0$, che è vera al di sotto della retta $y=1-x$, esclusa l'origine. Il limite non esiste, perché le restrizioni lungo gli assi tendono a 1, mentre quella lungo la retta $y=x$ tende a 2.

---

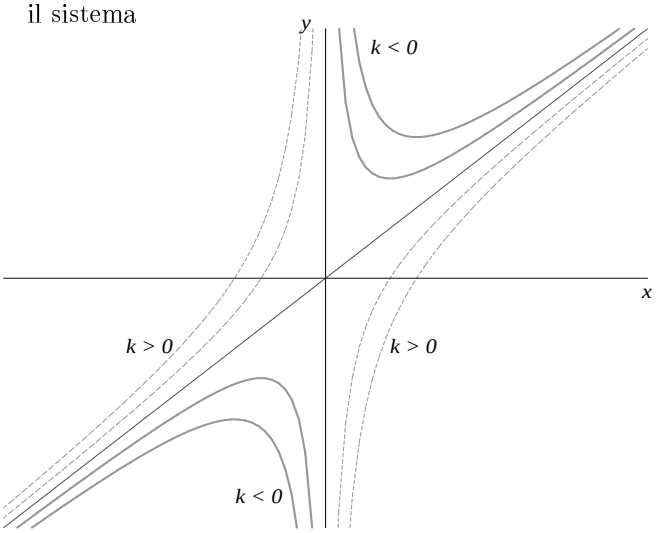
2. a) La funzione f è definita per le coppie (x,y) tali che $1+x^2-xy>0$, quindi il campo di esistenza è dato da $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ x>0,\ y<x+1/x\}\cup\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ x<0,\ y>x+1/x\}\cup\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:\ x=0\}$.
b) Le derivate parziali prime e seconde sono date da

$$f_x=\frac{2x-y}{1+x^2-xy},\quad f_y=\frac{-x}{1+x^2-xy},$$
$$f_{xx}=\frac{2-2x^2+2xy-y^2}{(1+x^2-xy)^2},\quad f_{yy}=\frac{-x^2}{(1+x^2-xy)^2},\quad f_{xy}=\frac{x^2-1}{(1+x^2-xy)^2}\ .$$

Vi è un unico punto critico (cioè in cui le derivate parziali prime sono entrambe nulle), le cui coordinate risolvono il sistema

$$\begin{cases}\dfrac{2x-y}{1+x^2-xy}=0\\[2ex] \dfrac{-x}{1+x^2-xy}=0\ :\end{cases}$$

e si tratta ovviamente dell'origine.



c) Dato $k\in\mathbf{R}$, l'insieme di livello k è costituito dai punti $(x,y)\in CE(g)$ tali che $g(x,y)=k$, ossia $1+x^2-xy=e^k$, da cui l'alternativa

$$\begin{cases}\text{se } x=0, \text{ allora } k=0 \text{ per ogni } y;\\ \text{se } x\neq 0, \text{ allora}\quad y=x+\dfrac{1-e^k}{x}\ .\end{cases}$$

Nella figura sono riportate le linee di livello (la riga continua corrisponde al caso $k>0$, quella tratteggiata al caso $k<0$; se $k=0$ si trova la bisettrice $y=x$ e, come detto nella prima alternativa, l'asse $x=0$.

---

3. Si tratta di una serie esponenziale (quindi convergente), che parte da $n=2$, dunque la somma vale

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\ -1-3\right)=\frac{e^3-4}{3}$$

---

4. La serie è a termini non negativi, anzi strettamente positivi non appena $x>0$ (il caso $x=0$ è banale): applicando il criterio del rapporto, occorre calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\ \frac{x^{n+1}}{x^n}\,\frac{(n+1)!}{n^n}\frac{(n+1)]^{n+1}}{(n+2)!}=\lim_{n\to+\infty}\ x\,\frac{n+1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e\,x$$

(l'ultima uguaglianza scende dal fatto che $[1+1/n]^n$ tende a e). Dunque, la serie converge se $e\,x<1$, ossia $x<1/e$, diverge se $x>1/e$.

---

5. (a) Il campo di esistenza D di ω è l'interno del cerchio unitario di centro l'origine, che è un insieme aperto e stellato, inoltre ω è chiusa, quindi è anche esatta in D. Determiniamo una primitiva F in D: scelto come punto di partenza dell'integrale curvilineo il punto $(0,0)$, se (x,y) è un punto di D avremo che $F(x,y)$ è data dall'integrale di ω lungo la curva ottenuta saldando il segmento che congiunge $(0,0)$ a $(x,0)$ con il segmento che congiunge $(x,0)$ a (x,y). I due segmenti in questione hanno nell'ordine le seguenti rappresentazioni

$$\begin{pmatrix}tx\\0\end{pmatrix},\quad t\in[0,1]\qquad\text{e}\qquad\begin{pmatrix}x\\ty\end{pmatrix},\quad t\in[0,1]$$

pertanto si ha

$$F(x,y)=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-t^2x^2}}\,x\,dt+\int_0^1\frac{ty+x\sqrt{1-x^2-t^2y^2}}{\sqrt{1-x^2-t^2y^2}}\,y\,dt=$$
$$=-\Big[\sqrt{1-t^2x^2}\Big]_0^1-\Big[\sqrt{1-x^2-t^2y^2}\Big]_0^1+\Big[xyt\Big]_0^1=-\sqrt{1-x^2-y^2}+xy+1.$$

Tutte le altre primitive in D sono date da $F + k$, al variare di $k \in \mathbf{R}$.
(b) L'integrale curvilineo richiesto lungo ϕ si calcola come segue:

$$\int_\phi \omega = \int_0^\pi \frac{1}{2}\frac{\cos t + (\sqrt{3}/2)\sin t}{\sqrt{3}/2}\,(-\frac{1}{2}\sin t)dt + \int_\phi \omega = \int_0^\pi \frac{1}{2}\frac{\sin t + (\sqrt{3}/2)\cos t}{\sqrt{3}/2}\,(\frac{1}{2}\cos t)dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[-\int_0^\pi (\sin t\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2 t)\,dt + \int_0^\pi (\sin t\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 t)\,dt\right] = \frac{1}{4}\int_0^\pi \cos(2t)\,dt = 0$$

(c) La curva ϕ descrive la semicirconferenza superiore di centro l'origine e raggio $1/2$, percorsa in senso antiorario; la curva ψ descrive la semicirconferenza inferiore, percorsa nello stesso senso. Poiché la forma è esatta, l'integrale lungo $\phi + \psi$ deve valere 0, quindi l'integrqle lungo ψ è l'opposto di quello lungo ϕ. Per quanto visto nel punto (b), l'integrale lungo ψ vale dunque 0.