

- Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.  
 2. Consegnare ANCHE questo foglio.  
 3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.  
 4. Tempo a disposizione: 120 min.

## 1. Data la funzione

$$\frac{x^2}{\log(1 - x^2 - y^2)},$$

determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPENSIBILE nel piano cartesiano  $x, y$ ;

determinare il limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

SOLUZIONE:  $CE = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$  (si tratta dell'interno del cerchio di centro l'origine e raggio 1, privato del centro). Il limite non esiste: calcolandolo lungo l'asse  $y$  si trova 0, mentre lungo l'asse  $x$  si ha a che fare con il limite di  $x^2/(\log(1 - x^2))$  per  $x$  tendente a 0, limite che vale  $-1$ .

## 2. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{y(y-x)},$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPENSIBILE nel piano cartesiano  $x, y$ ;

b) determinarne le derivate parziali del primo e del secondo ordine e trovare i punti critici;

c) determinare gli insiemi di livello e rappresentarli nel piano cartesiano  $x, y$ .

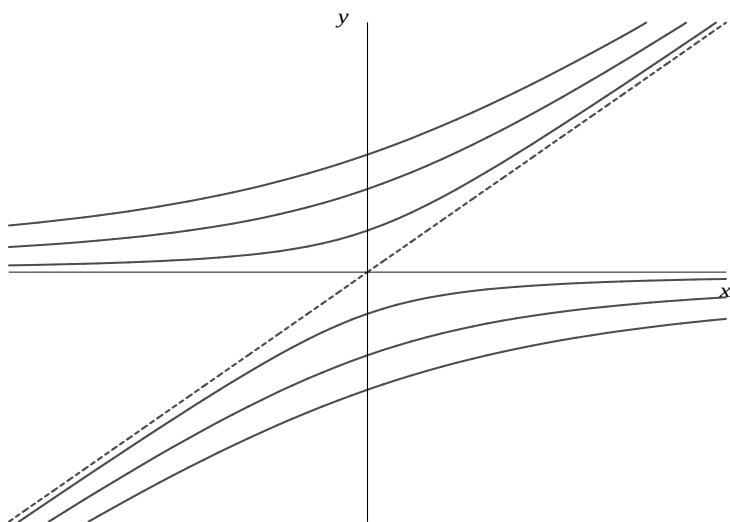
SOLUZIONE.

a) La funzione  $f$  è definita per le coppie  $(x, y)$  tali che  $y(y-x) \geq 0$ , quindi il campo di esistenza è dato dall'unione del secondo e del quarto quadrante con i due angoli acuti opposti al vertice delimitati dall'asse  $y$  e dalla bisettrice del primo e terzo quadrante.

b) Le derivate parziali prime e seconde esistono all'interno del campo di esistenza e sono date da

$$f_x = -\frac{y}{2\sqrt{y(y-x)}}, \quad f_y = \frac{2y-x}{2\sqrt{y(y-x)}},$$

$$f_{xx} = -\frac{y}{4(y-x)\sqrt{y(y-x)}}, \quad f_{yy} = -\frac{x^2}{4y(y-x)\sqrt{y(y-x)}}, \quad f_{xy} = \frac{x}{4(y-x)\sqrt{y(y-x)}}.$$



I punti critici sono quelli in cui le derivate parziali prime sono entrambe nulle: nel nostro caso ciò è impossibile, dunque non esistono punti critici.

c) Le curve di livello sono date dall'equazione  $f(x, y) = K$ , al variare di  $K \in \mathbb{R}$ . Nel campo di esistenza, l'equazione ha soluzione solo se  $K \geq 0$  ed equivale a

$$y^2 - xy = K^2, \quad \text{da cui} \quad x = y - \frac{K^2}{y}.$$

Dunque, le curve di livello sono grafici di funzioni della variabile  $y$ , tendenti asintoticamente ad appiattirsi sull'asse orizzontale e sulla bisettrice del primo e terzo quadrante come in figura. L'asse e detta bisettrice corrispondono al livello 0 (dunque sono costituiti dagli zeri della funzione  $f$ ).

## 3. A. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!+1}.$$

SOLUZIONE: la serie è a termini positivi: il termine generale tende a zero come  $1/(n-1)!$ , dunque la serie converge per il criterio del confronto.

B. Discutere la convergenza della serie  $\sum_{n=2}^{\infty} (n^{(1/n)} - 1)^n$ .

SOLUZIONE: la serie è a termini positivi: applicando il criterio della radice e detto  $a_n$  il termine generale, si deve valutare il limite di  $\sqrt[n]{a_n} = n^{(1/n)} - 1$  al tendere di  $n$  a infinito. Si trova facilmente che questo vale 0, dunque la serie converge per il criterio della radice.

C. Calcolare la somma della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$ .

SOLUZIONE: si tratta di una serie geometrica, da aggiustare un poco: la somma vale

$$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right] = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 - (2/3)} - 1 \right) = \frac{2}{3}.$$

---

4. Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{1}{y+1} dx - \frac{x}{y^2 + 2y + 1} dy,$$

- (a) discuterne l'esattezza e trovarne le primitive in ciascun semipiano in cui è definita;  
(b) sfruttando quanto trovato nel punto (a), calcolare

$$\int_{\phi} \omega, \quad \text{dove} \quad \phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi].$$

SOLUZIONE: (a) la forma differenziale è definita in  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = -1\}$ . Poiché il dominio non è connesso per archi, l'esattezza deve essere discussa separatamente in ognuna delle due componenti connesse (la parte di piano al di sopra della retta  $y = -1$  e quella al di sotto). Noi ci limiteremo alla prima, la trattazione dell'altro caso essendo simile. Nella parte di dominio  $D = \{(x, y) : y > -1\}$  la forma  $\omega$  è esatta, poiché è chiusa e la parte di dominio considerata è semplicemente connessa. Determiniamo una primitiva  $F$  in  $D$ : scelto come punto di partenza dell'integrale curvilineo il punto  $(0, 0)$ , se  $(x, y)$  è un punto di  $D$  avremo che  $F(x, y)$  è data dall'integrale di  $\omega$  lungo la curva ottenuta saldando il segmento che congiunge  $(0, 0)$  a  $(x, 0)$  con il segmento che congiunge  $(x, 0)$  a  $(x, y)$ . I due segmenti in questione hanno nell'ordine le seguenti rappresentazioni

$$\begin{pmatrix} tx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x \\ ty \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

pertanto si ha

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^1 x dt - \int_0^1 \frac{x}{t^2 y^2 + 2ty + 1} y dt = \\ &= x - x \int_0^1 \frac{y dt}{(ty + 1)^2} = \frac{x}{y + 1}. \end{aligned}$$

Tutte le primitive nella parte  $D$  di dominio considerata sono date da  $F(x, y) + K$ , al variare di  $K \in \mathbb{R}$ .

(b) Il calcolo diretto può essere evitato osservando che la curva  $\phi$  è a valori in  $D$  e ricordando che  $F(x, y)$  è una primitiva di  $\omega$  in  $D$ , quindi

$$\int_{\phi} \omega = F(\phi(\pi)) - F(\phi(0)) = F(-1, \pi^2) - F(1, 0) = -\frac{1}{\pi^2 + 1} - 1.$$