. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di Laurea (F,M) | Anno (primo, altro)

Analisi Matematica I | CALCOLO 2A | 19 settembre 2002

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Data la funzione

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-y}}\ ,$$

determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y; determinare il limite per $(x, y) \to (0, 0)$.
SOLUZIONE: $CE = \{(x, y) :\ y < x^2\}$ (si tratta della parte di piano situata "al di sotto" della parabola $y = x^2$). Il limite non esiste: calcolandolo lungo l'asse x si ha a che fare con il limite di $x^2/|x|$ per x tendente a 0, limite che non esiste.

---

2. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{\log(x+y)}{1-\log^2(x+y)},$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y;
b) determinarne le derivate parziali del primo ordine e trovare i punti critici;
c) determinare gli insiemi di livello e rappresentarli nel piano cartesiano x, y.
SOLUZIONE.
a) La funzione f è definita per le coppie (x, y) tali che $x + y > 0$ e $\log(x + y) \neq \pm 1$, quindi il campo di esistenza è dato dal semipiano individuato dalla bisettrice del secondo e del quarto quadrante e contenente il semiasse positivo delle y, ad esclusione delle rette $x + y = e$ e $x + y = 1/e$.
b) Le derivate parziali prime esistono in ogni punto del campo di esistenza e sono date da

$$f_x = f_y = \frac{1+\log^2(x+y)}{(x+y)[1-\log^2(x+y)]^2}\ .$$

I punti critici sono quelli in cui le derivate parziali prime sono entrambe nulle: nel nostro caso ciò è impossibile, dunque non esistono punti critici.
c) Le curve di livello sono date dall'equazione $f(x, y) = K$, al variare di $K \in \mathbb{R}$. Posto $t = \log(x + y)$, l'equazione equivale a

$$Kt^2 + t - K = 0\ , \qquad \text{da cui} \qquad t = \log(x+y) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4K^2}}{2K}\ .$$

Ricavando la quantità $x + y$ dall'ultima uguaglianza, si trova che le curve di livello sono rette parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

---

3. A. Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\sqrt{n+1}}{(n+2)^\beta \log n}$.
SOLUZIONE: la serie è a termini positivi: il termine generale tende a zero come $n^{-\beta+3/2}$, dunque la serie converge se e solo se $\beta - 3/2 > 1$, ossia $\beta > 5/2$.

B. Calcolare, per i valori di $\alpha \in \Re$ per cui è possibile, la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2\alpha)^n}$.
SOLUZIONE: si tratta di una serie geometrica: la somma vale

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\alpha}\right)^n = -\frac{2\alpha}{1+2\alpha}\ ; \qquad \text{purché} \quad |\alpha| > \frac{1}{2}\ .$$

---

4. Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{y-2}\,dx - \frac{2x}{(y-2)^2}\,dy,$$

(a) discuterne l'esattezza e trovarne le primitive in uno dei semipiani in cui è definita;
(b) sfruttando quanto trovato nel punto (a), calcolare

$$\int_\phi \omega, \qquad \text{dove} \qquad \phi(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

SOLUZIONE: (a) la forma differenziale è definita in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) : \ y = 2\}$. Discutiamo l'esattezza nel semipiano $D = \{(x, y) : \ y < 2\}$: qui la forma ω è esatta, poiché è chiusa e la parte di dominio considerata è semplicemente connessa. Determiniamo una primitiva F in D: scelto come punto di partenza dell'integrale curvilineo il punto $(0, 0)$, se (x, y) è un punto di D avremo che $F(x, y)$ è data dall'integrale di ω lungo la curva ottenuta saldando il segmento che congiunge $(0, 0)$ a $(x, 0)$ con il segmento che congiunge $(x, 0)$ a (x, y). I due segmenti in questione hanno nell'ordine le seguenti rappresentazioni

$$\begin{pmatrix} tx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1] \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} x \\ ty \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

pertanto si ha

$$F(x, y) = -\int_0^1 \frac{2x}{(ty-2)^2}\, y \, dt = \frac{xy}{y-2}\ .$$

Tutte le primitive nella parte D di dominio considerata sono date da $F(x, y) + K$, al variare di $K \in \mathbb{R}$.
(b) Il calcolo diretto può essere evitato osservando che la curva ϕ è a valori in D e regolare e ricordando che $F(x, y)$ è una primitiva di ω in D, quindi

$$\int_\phi \omega = F(\phi(2\pi)) - F(\phi(0)) = 0.$$

Allo stesso risultato si perviene, ovviamente, calcolando l'integrale lungo la curva indicata; una terza strada consiste nel calcolare l'integrale lungo un'altra curva regolare che abbia gli stessi estremi nell'ordine, ad esempio il segmento di estremi $(0, 0)$ e $(2\pi, 0)$, calcolo che si presenta molto facile.