. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di Laurea (F,M) | Anno (primo, altro)

Analisi Matematica I | CALCOLO 2A | 17 dicembre 2002

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Data la funzione

$$\frac{x^2}{\log(1-x^2-y^2)} \ ,$$

determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y; determinare il limite per $(x, y) \to (0, 0)$.
SOLUZIONE: $CE = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 < 1\}$ (si tratta dell'interno del cerchio di centro l'origine e raggio 1). Il limite non esiste: calcolandolo lungo l'asse y si trova 0, mentre lungo l'asse x si ha a che fare con il limite di $x^2/(\log(1-x^2))$ per x tendente a 0, limite che vale -1.

---

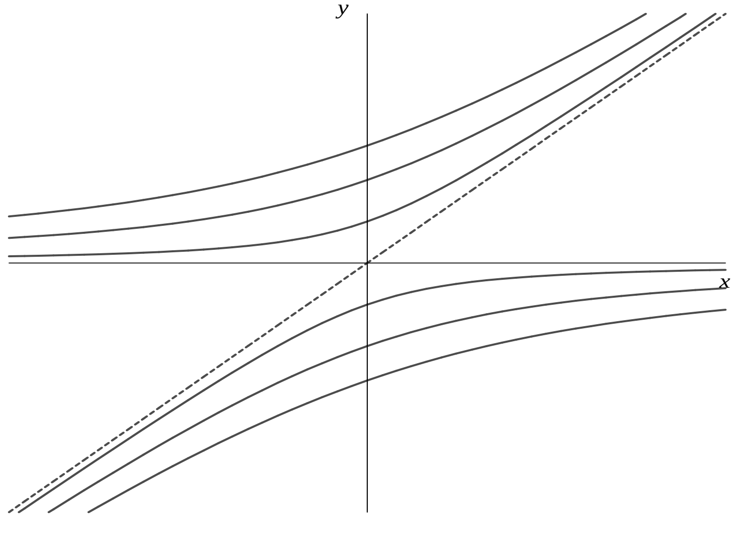
2. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{y(y-x)},$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y;
b) determinarne le derivate parziali del primo e del secondo ordine e trovare i punti critici;
c) determinare gli insiemi di livello e rappresentarli nel piano cartesiano x, y.
SOLUZIONE.
a) La funzione f è definita per le coppie (x, y) tali che $y(y-x) \geq 0$, quindi il campo di esistenza è dato dall'unione del secondo e del quarto quadrante con i due angoli acuti opposti al vertice delimitati dall'asse y e dalla bisettrice del primo e terzo quadrante.
b) Le derivate parziali prime e seconde esistono all'interno del campo di esistenza e sono date da

$$f_x = -\frac{y}{2\sqrt{y(y-x)}}, \quad f_y = \frac{2y-x}{2\sqrt{y(y-x)}},$$

$$f_{xx} = -\frac{y}{4(y-x)\sqrt{y(y-x)}}, \quad f_{yy} = -\frac{x^2}{4y(y-x)\sqrt{y(y-x)}}, \quad f_{xy} = \frac{x}{4(y-x)\sqrt{y(y-x)}} \ .$$



I punti critici sono quelli in cui le derivate parziali prime sono entrambe nulle: nel nostro caso ciò è impossibile, dunque non esistono punti critici.
c) Le curve di livello sono date dall'equazione $f(x, y) = K$, al variare di $K \in \mathbb{R}$. Nel campo di esistenza, l'equazione ha soluzione solo se $K \geq 0$ ed equivale a

$$y^2 - xy = K^2 \ , \qquad \text{da cui} \qquad x = y - \frac{K^2}{y} \ .$$

Dunque, le curve di livello sono grafici di funzioni della variabile y, tendenti asintoticamente ad appiattirsi sull'asse orizzontale e sulla bisettrice del primo e terzo quadrante come in figura. L'asse e detta bisettrice corrispondono al livello 0 (dunque sono costituiti dagli zeri della funzione f).

---

3. A. Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!+1}$.

SOLUZIONE: la serie è a termini positivi: il termine generale tende a zero come $1/(n-1)!$, dunque la serie converge per il criterio del confronto.

B. Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(n^{(1/n)}-1)^n$.

SOLUZIONE: la serie è a termini positivi: applicando il criterio della radice e detto a_n il termine generale, si deve valutare il limite di $\sqrt[n]{a_n} = n^{(1/n)} - 1$ al tendere di n a infinito. Si trova facilmente che questo vale 0, dunque la serie converge per il criterio della radice.

C. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}$.

SOLUZIONE: si tratta di una serie geometrica, da aggiustare un poco: la somma vale

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-(2/3)} - 1\right) = \frac{2}{3}\ .$$

---

4. Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{1}{y+1}\, dx - \frac{x}{y^2+2y+1}\, dy,$$

(a) discuterne l'esattezza e trovarne le primitive in ciascun semipiano in cui è definita;
(b) sfruttando quanto trovato nel punto (a), calcolare

$$\int_\phi \omega, \qquad \text{dove} \qquad \phi(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ t^2\end{pmatrix}, \qquad t\in[0,\pi].$$

SOLUZIONE: (a) la forma differenziale è definita in $\mathbf{R}^2\backslash\{(x,y)\ :\ y=-1\}$. Poiché il dominio non è connesso per archi, l'esattezza deve essere discussa separatamente in ognuna delle due componenti connesse (la parte di piano al di sopra della retta $y=-1$ e quella al di sotto). Noi ci limiteremo alla prima, la trattazione dell'altro caso essendo simile. Nella parte di dominio $D=\{(x,y)\ :\ y>-1\}$ la forma ω è esatta, poiché è chiusa e la parte di dominio considerata è semplicemente connessa. Determiniamo una primitiva F in D: scelto come punto di partenza dell'integrale curvilineo il punto $(0,0)$, se (x,y) è un punto di D avremo che $F(x,y)$ è data dall'integrale di ω lungo la curva ottenuta saldando il segmento che congiunge $(0,0)$ a $(x,0)$ con il segmento che congiunge $(x,0)$ a (x,y). I due segmenti in questione hanno nell'ordine le seguenti rappresentazioni

$$\begin{pmatrix}tx\\ 0\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1] \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix}x\\ ty\end{pmatrix}, \quad t\in[0,1]$$

pertanto si ha

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^1 x\, dt - \int_0^1 \frac{x}{t^2y^2+2ty+1}\, y\, dt = \\ &= x - x\int_0^1 \frac{y\, dt}{(ty+1)^2} = \frac{x}{y+1} + K, \end{aligned}$$

al variare di $K\in\mathbb{R}$.

(b) Il calcolo diretto può essere evitato osservando che la curva ϕ è a valori in D e ricordando che $F(x,y)$ è una primitiva di ω in D, quindi

$$\int_\phi \omega = F(\phi(\pi)) - F(\phi(0)) = F(-1,\pi^2) - F(1,0) = -\frac{1}{\pi^2+1} - 1.$$