Cognome e nome matricola Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica II CALCOLO 2A 7 gennaio 2003

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Data la funzione

$$\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \log(y^2 - x + 2),$$

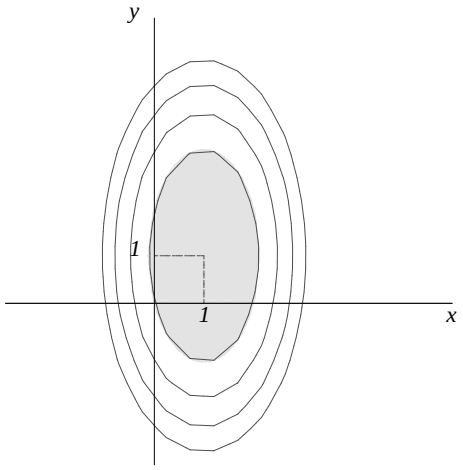
determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y; determinare il limite per $(x, y) \to (0, 0)$.
SOLUZIONE. $CE = \{(x, y) : \ x < y^2 + 2\}\backslash\{(0, 0)\}$ (si tratta della parte di piano posta a sinistra, rispetto all'orientameno dell'asse x, della parabola $x = y^2 + 2$, privata dell'origine). Il limite vale $\log 2$: la funzione $\log(y^2 - x + 2)$ è continua nell'origine, ove vale $\log 2$, mentre passando alle coordinate polari si trova che la frazione tende a 0.

---

2. Data la funzione

$$f(x, y) = \log(4x^2 + y^2 - 8x - 2y),$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y;
b) determinarne le derivate parziali del primo ordine e trovare i punti critici;
c) determinare gli insiemi di livello e rappresentarli nel piano cartesiano x, y.
SOLUZIONE. a) La funzione f è definita per le coppie (x, y) tali che $4x^2 + y^2 - 8x - 2y > 0$, quindi il campo di esistenza è dato dalla zona esterna all'ellisse $4(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$, che ha centro in $(1, 1)$ e semiassi di lunghezza rispettivamente 1 e 2 (la zona proibita è evidenziata in grigio nella figura).



b) Le derivate parziali prime sono date da

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{8(x-1)}{4x^2 + y^2 - 8x - 2y}, \\ f_y = \dfrac{2(y-1)}{4x^2 + y^2 - 8x - 2y}. \end{cases}$$

I punti critici sono quelli in cui le derivate parziali prime sono entrambe nulle: nel nostro caso non ne esistono, poiché le derivate prime non si annullano mai nel campo di esistenza.
c) Le curve di livello sono date dall'equazione $\log(4x^2 + y^2 - 8x - 2y) = K$, al variare di $K \in \mathbb{R}$. Nel campo di esistenza, l'equazione equivale a

$$4(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 + 4e^K.$$

Dunque, le curve di livello sono ellissi simili a quella che delimita il campo di esistenza.
Nella figura sono riportate alcune linee di livello: il campo di esistenza è l'esterno della zona grigia.

---

3. A. Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n - 1}{1 + n^4}$.

SOLUZIONE. La serie è a termini positivi e il termine generale tende a zero come $1/n$, dunque la serie diverge per il criterio del confronto.

B. Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n+1)!}$.

SOLUZIONE. Si tratta di una serie esponenziale, da aggiustare un poco: la somma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n+1)!} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} - 1 - 2 \right) = \frac{1}{4}(e^2 - 3).$$

4. Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{x^2 - y - 2}\, dx - \frac{1}{2x^2 - 2y - 4}\, dy,$$

(a) discuterne l'esattezza e in caso positivo trovare una primitiva;
(b) calcolare

$$\int_\phi \omega, \qquad \text{dove} \qquad \phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 + \sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [\pi/2, \pi].$$

SOLUZIONE. (a) La forma differenziale è definita in $\mathbf{R}^2 \backslash \{(x, y) :\ y = x^2 - 2\}$. Poiché il dominio non è connesso per archi, l'esattezza deve essere discussa separatamente in ognuna delle due componenti connesse (la parte di piano al di sopra della parabola e quella al di sotto). Noi ci limiteremo alla prima, la trattazione dell'altro caso essendo simile. Nella parte di dominio $D = \{(x, y) :\ y > x^2 - 2\}$ la forma ω è esatta, poiché è chiusa e la parte di dominio considerata è semplicemente connessa. Determiniamo una primitiva F in D: scelto come punto di partenza dell'integrale curvilineo il punto $(0, 0)$, se (x, y) è un punto di D avremo che $F(x, y)$ è data dall'integrale di ω lungo la curva ottenuta saldando il segmento che congiunge $(0, 0)$ a $(x, 0)$ con il segmento che congiunge $(x, 0)$ a (x, y). I due segmenti in questione hanno nell'ordine le seguenti rappresentazioni

$$\begin{pmatrix} tx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1] \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} x \\ ty \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

pertanto si ha

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^1 \frac{tx}{t^2 x^2 - 2}\, x\, dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2 - ty - 2}\, y\, dt = \\ &= \frac{1}{2} \Big[\log |t^2 x^2 - 2| \Big]_0^1 + \frac{1}{2} \Big[\log |x^2 - ty - 2| \Big]_0^1 = \frac{1}{2} \log |x^2 - y - 2| - \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

Poiché risulta $x^2 - y - 2 < 0$ in D, si ha $F(x, y) = (1/2)\,[\log(y - x^2 + 2) - \log 2\,]$.
(b) il calcolo può essere fatto direttamente (scrivendo $1 - \sin^2 t$ in luogo di $\cos^2 t$ nei due denominatori e quindi effettuando la sostituzione $\tau = \sin t$) oppure può essere evitato osservando che la curva ϕ è a valori in D e ricordando che $F(x, y)$ è una primitiva di ω in D, quindi

$$\int_\phi \omega = F(\phi(\pi)) - F(\phi(\pi/2)) = -\frac{1}{2} \log 2.$$