. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di Laurea (D,F,M,NTF) | Anno (primo, altro)

Analisi Matematica II | CALCOLO 2A | 20 giugno 2003

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Date le funzioni

$$\frac{x}{x^2+y}\,, \qquad \frac{x^3}{\log(1-x^2-y^2)}\,,$$

determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y; determinare il limite per $(x, y) \to (0, 0)$.
SOLUZIONE. Prima funzione: $CE = \{(x, y) :\ y \neq -x^2\}$ (si tratta di tutto il piano privato della parabola avente asse verticale, vertice nell'origine, convessità verso il basso e passante per $(1, -1)$). Il limite non esiste: calcolandolo lungo l'asse y si trova 0, mentre lungo l'asse x si ha a che fare con il limite di $1/x$ per x tendente a 0, limite che non vale 0.
Seconda funzione: $CE = \{(x, y) :\ 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ (si tratta dell'interno del cerchio di centro l'origine e raggio 1, privato del centro). Il limite esiste e vale 0: passando alle coordinate polari, si ottiene

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^3\theta}{\log(1-\rho^2)}$$

che vale 0 uniformemente in θ, dato che $\rho^2/\log(1-\rho^2)$ tende a -1.

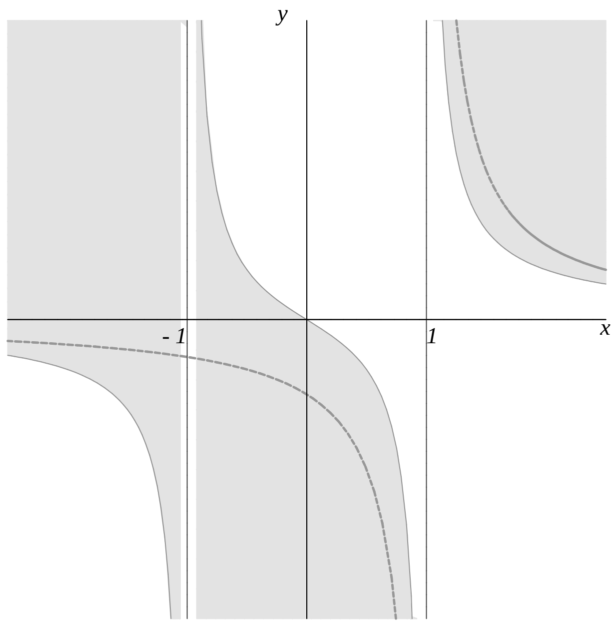
---

2. Data la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2y - x - y},$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y;
b) determinarne le derivate parziali del primo e del secondo ordine e trovare i punti critici;
c) determinare gli insiemi di livello 0 e 1 e rappresentarli nel piano cartesiano x, y.
SOLUZIONE.
a) La funzione f è definita per le coppie (x, y) tali che $x^2y - x - y \geq 0$, quindi il campo di esistenza è dato dalla zona evidenziata in grigio nella figura, comprese le linee curve continue e la retta verticale $\{x = -1\}$.
b) Le derivate parziali prime e seconde esistono all'interno del campo di esistenza e sono date da

$$f_x = \frac{2xy-1}{2\sqrt{x^2y-x-y}}, \quad f_y = \frac{x^2-1}{2\sqrt{x^2y-x-y}},$$
$$f_{xx} = -\frac{4y^2+1}{4\sqrt{[x^2y-x-y]^3}}, \quad f_{yy} = -\frac{(x^2-1)^2}{4\sqrt{[x^2y-x-y]^3}}, \quad f_{xy} = \frac{2x^3y-3x^2-2xy-1}{4\sqrt{[x^2y-x-y]^3}}\ .$$



I punti critici sono quelli in cui le derivate parziali prime sono entrambe nulle: nel nostro caso ciò equivale al sistema delle due equazioni $2xy-1=0$ e $x^2-1=0$, da cui le due soluzioni $(1,1/2)$ e $(-1,-1/2)$, di cui la prima non è accettabile in quanto non appartiene al campo di esistenza.

c) Le curve di livello sono date dall'equazione $f(x,y)=K$, al variare di $K \in \mathbb{R}$. Nel nostro caso, si richiede di esaminare i casi $K=0$ e $K=1$: il primo dà luogo alle linee curve della figura; il secondo è risolto dai punti che soddisfano l'equazione $x=-1$ e da quelli che soddisfano l'equazione $y=1/(x-1)$: nella figura, l'insieme di livello 1 corrisponde all'iperbole tratteggiata e alla retta verticale di equazione $x=-1$.

---

3. A. Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$.

SOLUZIONE: la serie è a termini positivi: il termine generale tende a zero come $1/n$, dunque la serie diverge per il criterio del confronto.

B. Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n+1}}$.

SOLUZIONE: a parte modificazioni inessenziali, la serie è geometrica, di ragione $-1/5$, quindi converge (assolutamente): la somma vale

$$-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n = -\frac{1}{5}\,\frac{1}{1+1/5} = -\frac{1}{6}.$$

---

4. Date le forme differenziali

$$\omega = \frac{y}{x}\,dx + \,dy, \qquad \lambda = \frac{y}{x}\,dx + \log x\,dy,$$

discuterne l'esattezza e, se esistono, trovarne le primitive. Inoltre, calcolare gli integrali curvilinei $\int_\phi \omega$ e $\int_\phi \lambda$, dove ϕ è la curva di componenti

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad t \in [1,2].$$

SOLUZIONE: la forma differenziale ω è definita in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y):\ x=0\}$ e non verifica la condizione delle derivate incrociate, quindi non può essere esatta. La forma differenziale λ è definita nel dominio $D=\{(x,y):\ x>0\}$ e verifica la condizione delle derivate incrociate: poiché il dominio è stellato, la forma λ è esatta. Per determinare una primitiva F in D si può applicare il metodo delle primitive parziali: da $F_x = y/x$ si deduce che $F(x,y) = y\log x + g(y)$, dove g è una arbitraria funzione della variabile y, definita in $\mathbb{R}$ e derivabile, mentre da $F_y = \log x$ si deduce che $F(x,y) = y\log x + h(x)$, dove h è una arbitraria funzione della variabile x, definita in $]0,+\infty[$ e derivabile. Per confronto tra le due espressioni di F, si ha che $g(y)=h(x)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e per ogni $x>0$, da cui le due funzioni g e h sono costanti, quindi $F(x,y) = y\log x + K$ è la generica primitiva di λ in D, al variare di $K \in \mathbb{R}$.

Circa gli integrali curvilinei, osservato che gli estremi della curva sono, nell'ordine, i punti $(1,1)$ e $(\sqrt{2},4)$, per un teorema relativo ai differenziali esatti si ha

$$\int_\phi \lambda = F(\sqrt{2},4) - F(1,1) = 2\log 2,$$

mentre

$$\int_\phi \omega = \int_1^2 \left[\frac{t^2}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{2\sqrt{t}} \ + \ 2t\right] dt = \int_1^2 \left[\frac{t}{2} + 2t\right] dt = \frac{15}{4}\ .$$