. . . .

Cognome e nome   firma   Corso di Laurea (D,F,M,NTF)   Anno (primo, altro)

Analisi Matematica II   CALCOLO 2A   9 luglio 2003

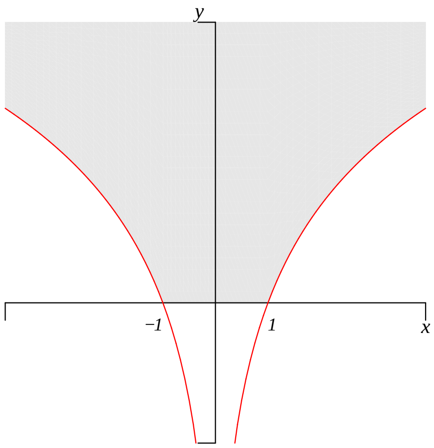
Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Date le funzioni

$$\frac{|x|+\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{e^y-x^2}}\,, \qquad\qquad \frac{|x|\sqrt{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y; determinare il limite per $(x, y) \to (0, 0)$.



SOLUZIONE. Prima funzione: il campo di esistenza (in grigio nella figura) è dato da $CE = \{(x, y) :\ x \neq 0 \text{ e } y > 2\log|x| \text{ e } y \geq 0\} \cup \{(x, y) :\ x = 0 \text{ e } y > 0\}$. Il limite non esiste: calcolandolo lungo l'asse x si trova 2, mentre lungo l'asse y si ha a che fare con il limite di $e^{-y/2} + 1/\sqrt{y}$ per y tendente a 0^+, limite che non vale 2.
Seconda funzione: $CE = \{(x, y) :\ y \geq 0 \text{ e } (x, y) \neq (0, 0)\}$. Il limite esiste e vale 0: basta osservare che

$$0 \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$$

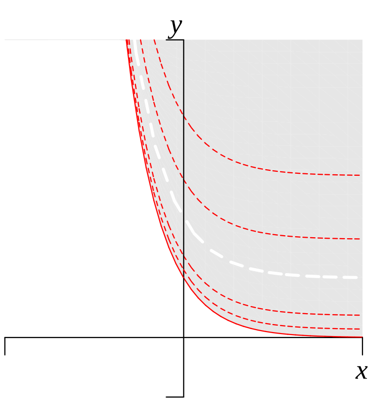
e che (ovviamente) $\sqrt{y} \to 0$.

---

2. Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x - \log(ye^x - 1)},$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y;
b) determinarne le derivate parziali del primo ordine;
c) determinare gli insiemi di livello e rappresentarli nel piano cartesiano x, y.



SOLUZIONE.
a) La funzione f è definita per le coppie (x, y) tali che $ye^x > 1$ e $ye^x - 1 \neq e^x$, quindi il campo di esistenza è dato dalla zona evidenziata in grigio nella figura, costituita dai punti che stanno sopra il grafico della funzione e^{-x} (linea continua) e non appartengono al grafico della funzione $1 + e^{-x}$ (linea tratteggiata in bianco).
b) Le derivate parziali prime esistono all'interno del campo di esistenza e sono date da

$$f_x = \frac{1}{[x - \log(ye^x - 1)]^2(ye^x - 1)}\,,$$

$$f_y = \frac{e^x}{[x - \log(ye^x - 1)]^2(ye^x - 1)}\,.$$

c) Le curve di livello sono date dall'equazione $f(x, y) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Osservato che non può essere $k = 0$ e posto di conseguenza $K = 1/k$, la condizionew diventa $x - \log(ye^x - 1) = K$, da cui $y = e^{-K} + e^{-x}$. Nella figura sono riportate (tratteggiate in nero) le linee di livello corrispondenti ai valori $k = 0.5, 1$ (al di sotto della linea tratteggiata bianca) e $k = -1, -2$ (al di sopra della linea tratteggiata in bianco).

---

3. A. Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n^2}\ ).$

SOLUZIONE: la serie è a termini positivi; inoltre, grazie al fatto che il limite della funzione $(1/x)\log(1+x)$ per $x \to 0$ vale 1, si deduce che il termine generale tende a zero come $1/n^2$, dunque la serie converge per il criterio del confronto.

B. Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ e, se possibile, calcolarne la somma.

SOLUZIONE: a parte modificazioni di poco conto, la serie è esponenziale, quindi converge (assolutamente): la somma si ottiene come segue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = \frac{1}{2}\,[\ e^2 - 1 - 2].$$

---

4. Date le forme differenziali

$$\omega = y\ dx + \ dy, \qquad \lambda = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\right)\ dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\ dy,$$

calcolare gli integrali curvilinei $\int_\phi \omega$ e $\int_\phi \lambda$, dove ϕ è la curva di componenti

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} -2t^2+4 \\ (1-\sqrt{2})t^2 + t + \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1, \sqrt{2}].$$

SOLUZIONE: entrambe le forme differenziali sono definite in $\mathbf{R}^2$; la prima non verifica la condizione delle derivate incrociate, quindi non può essere esatta; la seconda sì, quindi è esatta dato che il dominio è stellato. Pertanto, nel caso della prima forma differenziale l'integrale va calcolato in base alla definizione, ottenendo

$$\int_\phi \omega = \int_{-1}^{\sqrt{2}} \{[(1-\sqrt{2})t^2 + t + \sqrt{2}](-4t) + 2(1-\sqrt{2})t + 1\}\ dt =$$
$$= (-4)(1-\sqrt{2})\left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{\sqrt{2}} - 4\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{\sqrt{2}} + 2(1-3\sqrt{2})\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{\sqrt{2}} + \Big[t\Big]_{-1}^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{3}(7+5\sqrt{2}).$$

Invece, nel caso della seconda forma differenziale si può sostituire equivalentemente la curva con un'altra avente gli stessi estremi nell'ordine: poiché il primo estremo è il punto di coordinate $(2,0)$ e il secondo estremo è il punto di coordinate $(0,2)$, quindi giacciono sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 2, data l'espressione dei coefficienti della forma λ, sostituiamo la curva ϕ con l'arco di circonferenza

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, \pi/2]$$

che ha gli stessi estremi nell'ordine. Dunque

$$\int_\phi \lambda = \int_\gamma \lambda = \int_0^{\pi/2} \left[\left(1 + \frac{2\cos t}{\sqrt{5}}\right)(-2\sin t) + \frac{2\sin t}{\sqrt{5}}(2\cos t)\right]\ dt =$$
$$= \int_0^{\pi/2} (-2\sin t)\ dt = -2.$$