. . . .

Cognome e nome | firma | Corso di Laurea (D,F,M,NTF) | Anno (primo, altro)

Analisi Matematica II - CALCOLO 2A 15 settembre 2003

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Posto

$$g(x,y) = \frac{xy + \sin(xy)}{x^2+y^2} \ ,$$

a) determinare il campo di esistenza della funzione $g(x,y) + \sqrt{1-x-y^2}$ e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y;
b) determinare il limite di $g(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$;
c) determinare il limite di $\sqrt{x}\, g(x,y)$ per $(x,y) \to (0,0)$.

SOLUZIONE. a) Le condizioni da imporre sono $x^2+y^2 \neq 0$ e $1-x-y^2 \geq 0$, che sono soddisfatte nella parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $x = 1-y^2$ contenente l'origine, esclusa la medesima.
b) La funzione vale 0 lungo gli assi e $1/2[1 + (\sin y^2)/y^2]$ lungo la retta $y = x$, lungo la quale il limite vale 1. Pertanto, il limite non esiste.
c) Fuori dagli assi e in un intorno dell'origine, si ha

$$g(x,y) = \frac{xy + \sin(xy)}{xy} \quad \frac{xy}{x^2+y^2} \ :$$

la prima frazione tende a 2 e la seconda è limitata (in coordinate polari diventa semplicemente $\sin\theta \cos\theta$). Dunque la funzione g è complessivamente limitata in un intorno dell'origine e quindi il prodotto $\sqrt{x}\, g(x,y)$ tende a 0.

---

2. Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{x} \ \log(x+y)),$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y;
b) calcolare le derivate parziali del primo ordine;
c) determinare gli insiemi di livello e rappresentarli nel piano cartesiano x, y.

SOLUZIONE. a) Le condizioni da imporre sono $x \neq 0$ e $x + y > 0$, che sono soddisfatte nel semipiano delimitata dalla retta di equazione $y = -x$ e contenente il semiasse positivo delle x, privato del semiasse positivo delle y.
b) Si ha

$$f_x = -\frac{1}{x^2} \ \log(x+y) \ + \frac{1}{x(x+y)} \ , \qquad f_y = \frac{1}{x(x+y)} \ .$$

c) si tratta di determinare i punti le cui coordinate (x,y) risolvono l'equazione $f(x,y) = \lambda$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Si trova la famiglia di curve di equazione $y = e^{kx} - x$.

---

3. Discutere la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!}$.

SOLUZIONE. La serie converge assolutamente per il criterio del rapporto. Osservato che $(-4)^n = (-1)^n\, 2^{2n}$, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}(\sin 2 - 2).$$

---

4. Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\log n}$.

SOLUZIONE. La serie è a termini positivi e diverge per il criterio del confronto: infatti per $n \to +\infty$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}\log n} > \frac{1}{n+1} \ ,$$

dato che $(n+1)/[\sqrt{n+1}\log n] = \sqrt{n+1}/\log n$ tende a $+\infty$.

---

5. Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{-2x}{y-x^2}\, dx + \frac{2y^2-2x^2y+1}{y-x^2}\, dy,$$

a) discuterne l'esattezza e in caso positivo trovare una primitiva;
b) calcolare

$$\int_\phi \omega, \qquad \text{dove} \qquad \phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0,1].$$

SOLUZIONE. (a) Il campo di esistenza D di ω è il piano privato della parabola di equazione $y = x^2$: poiché D è un insieme aperto non connesso per archi, occorre discutere l'esattezza nelle due parti di piano separate dalla parabola in questione. Ognuna di esse è un insieme aperto e semplicemente connesso, inoltre ω è chiusa, quindi è anche esatta in D. Determiniamo una primitiva F nella parte di D contenente il semipiano $\{y < 0\}$. Se (x_0, y_0) è un punto dell'insieme in questione, $F(x_0, y_0)$ sarà data dall'integrale di ω lungo la curva ottenuta saldando il segmento che congiunge $(0,-1)$ a $(x_0,-1)$ con il segmento che congiunge $(x_0,-1)$ a (x_0,y_0). I due segmenti in questione hanno nell'ordine le seguenti rappresentazioni

$$\begin{pmatrix} tx_0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1] \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ -1+t(y_0+1) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Pertanto, osservato che $(2y^2-2x^2y+1)/(y-x^2) = 2y + [1/(y-x^2)]$, si ha

$$F(x_0,y_0) = \int_0^1 \frac{2tx_0}{1+t^2x_0^2}\, x_0\, dt + \int_0^1 \left[\frac{1}{-1+t(y_0+1)-x_0^2} + 2[-1+t(y_0+1)]\right](y_0+1)\, dt =$$
$$= \Big[\log(1+t^2x_0^2)\Big]_0^1 + \Big[\log|-1+t(y_0+1)-x_0^2|\Big]_0^1 + \Big[-2t(y_0+1)+t^2(y_0+1)^2\Big]_0^1 = \log|y_0-x_0^2| + y_0^2 - 1.$$

Pertanto, detto (x,y) il generico punto della parte di D che stiamo considerando, di ha $F(x,y) = \log|y-x^2| + y^2 - 1$. Tutte le altre primitive nella parte di D considerata sono date da $F + k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Una primitiva nella rimanente parte di D può essere determinata in modo analogo e la formula finale risultante è formalmente la medesima (la costante arbitraria potendo essere diversa da quella precedente).
(b) L'integrale curvilineo lungo ϕ si può calcolare direttamente oppure come segue, in modo più semplice utilizzando la primitiva trovata in precedenza:

$$\int_\phi \omega = F(\phi(1)) - F(\phi(0)) = F(1,0) - F(0,-1) = -1.$$