....

Cognome e nome | firma | Corso di Laurea (D,F,M,NTF) | Anno (primo, altro)

Analisi Matematica II - CALCOLO 2A 16 dicembre 2003

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. Per le risposte, usare i fogli protocollo distribuiti e scrivere in modo **LEGGIBILE** (utilizzare fogli a parte per la brutta copia).
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 120 minuti.

---

1. Date le due funzioni

$$f(x,y) = \frac{\log[1+(x^2+y^2)]}{xy}, \qquad g(x,y) = \frac{\log[1+(x^2+y^2)]}{x^2+y^2},$$

a) determinare separatamente il loro campo di esistenza;
b) determinare il loro limite per $(x,y) \to (0,0)$.

SOLUZIONE. a) La prima funzione è definita ovunque tranne sugli assi; la seconda ovunque tranne nell'origine.
b) Prima funzione: lungo le rette $y = x$ e $y = 2x$ essa vale rispettivamente

$$\frac{\log[1+2x^2]}{x^2}, \qquad \text{e} \qquad \frac{\log[1+5x^2]}{2x^2}.$$

Ricordando che la funzione $[\log(1+t)]/t$ tende a 1 per $t \to 0$, si deduce che i limiti delle due restrizioni sono diversi, quindi la funzione $f(x,y)$ non ha limite.
Seconda funzione: essa si presenta come composizione delle due funzioni $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ e $t \mapsto [\log(1+t)]/t$. La prima delle due è ovviamente continua ovunque; la seconda può essere estesa con continuità nell'origine assegnandole valore 1. Per il teorema di composizione delle funzioni continue, la funzione $g(x,y)$ ha limite uguale a 1.

---

2. Data la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2-x-y} - x,$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x,y;
b) calcolare le derivate parziali del primo ordine;
c) determinare l'insieme degli zeri della funzione e rappresentarlo nel piano cartesiano x,y.
d) determinare l'insieme in cui la funzione vale 1 e rappresentarlo nel piano cartesiano x,y.

SOLUZIONE. a) La condizione da imporre è $x^2-x-y \geq 0$, che è soddisfatta nella parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y = x^2-x$ e contenente il semiasse negativo delle y, inclusa la parabola stessa.
b) Si ha

$$f_x = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-y}} - 1, \qquad f_y = \frac{-1}{2\sqrt{x^2-x-y}}.$$

c) Si tratta di determinare i punti le cui coordinate (x,y) risolvono l'equazione $f(x,y) = 0$, ossia $\sqrt{x^2-x-y} = x$: se $x < 0$, non si può avere soluzione; se $x \geq 0$, allora l'equazione equivale a $x^2-x-y = x^2$, da cui $y = -x$. Pertanto, l'insieme degli zeri è costituito dalla bisettrice del quarto quadrante, origine inclusa.
d) Si tratta di determinare i punti le cui coordinate (x,y) risolvono l'equazione $f(x,y) = 1$, ossia $\sqrt{x^2-x-y} = x+1$: come nel caso precedente, se $x+1 < 0$, non si può avere soluzione; se $x+1 \geq 0$, allora l'equazione equivale a $x^2-x-y = x^2+2x+1$, da cui $y = -3x-1$. Pertanto, l'insieme degli zeri è costituito dalla semiretta di equazione $y = -3x-1$, con $x \geq -1$. Si noti che questa semiretta è tangente alla parabola che delimita il campo di esistenza proprio nel punto di origine $(-1,2)$.

---

3. Discutere la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{5^{n+1}}$.

SOLUZIONE. La serie proviene dalla serie geometrica di ragione $4/5$, quindi converge. Circa la somma, si ha

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n - 1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25}.$$

---

4. Discutere la convergenza e, se possibile, calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right]$.

SOLUZIONE. Si può procedere in molti modi: il più immediato consiste nello sfruttare la struttura telescopica, grazie alla quale la serie converge poiché converge (a 0) la successione il cui termine generale è $1/2^n$. Dunque la somma della serie è data da $1/2$. Alla stessa conclusione si può giungere osservando che, dopo aver ridotto il termine generale della serie a denominatore comune, si ha a che fare con la serie (geometrica) il cui termine generale è $1/2^{n+1}$, la somma partendo da $n = 1$.

---

5. Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{1}{1+x^2}\,dx + \,dy,$$

a) discuterne l'esattezza e in caso positivo trovare una primitiva;
b) calcolare

$$\int_\phi \omega, \qquad \text{dove} \qquad \phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, \sqrt{\pi}].$$

SOLUZIONE. (a) Il campo di esistenza di ω è tutto il piano, che è stellato rispetto a qualunque suo punto: pertanto, l'esattezza della forma è garantita dal fatto di essere chiusa. Circa la determinazione di una primitiva F, basta osservare che, dovendo essere $F_y = 1$, allora sarà $F(x, y) = y + g(x)$, con g funzione della sola variabile x. Inoltre, sapendo che

$$F_x(x, y) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

si deduce facilmente che $g(x) = \arctan x + C$, dove C è una arbitraria costante. In particolare, risulta essere una primitiva di ω la funzione $F(x, y) = \arctan x + y$.
(b) L'integrale curvilineo lungo ϕ si può calcolare in molti modi. Poiché quello diretto porta a calcoli complicati, è preferibile sostituire il cammino di integrazione con un altro che sia anch'esso di classe C^1 e abbia gli stessi estremi nell'ordine, ad esempio il segmento $x(s) = s$, $y(s) = 0$, con $s \in [0, \pi]$: in questo modo il calcolo è molto semplice. Ma più semplice ancora è utilizzare la primitiva trovata in precedenza:

$$\int_\phi \omega = F(\phi(\sqrt{\pi})) - F(\phi(0)) = F(\pi, 0) - F(0, 0) = \arctan \pi.$$