

- Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
 2. Consegnare ANCHE questo foglio.
 3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
 4. Tempo a disposizione: 120 min.

1. A. Data la funzione

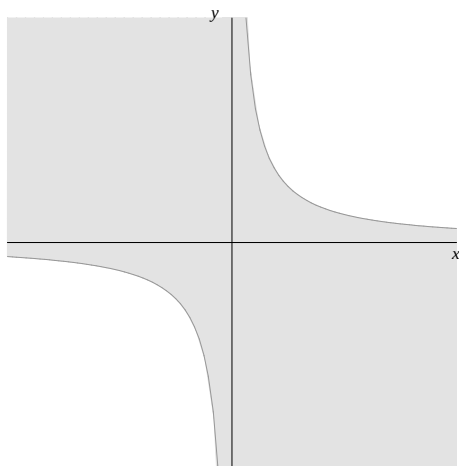
$$\frac{(x+1)y}{x^2+y^2},$$

determinare il limite (se esiste) per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

B. Data la funzione

$$\frac{x^2(x+1)y}{x^2+y^2} + \sqrt{1-xy},$$

determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y ;
determinare il limite (se esiste) per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.



SOLUZIONE. A. Il campo di esistenza è dato da tutto il piano privato dell'origine; il limite non esiste: calcolandolo lungo l'asse x si trova 0, mentre lungo l'asse y si ha a che fare con il limite di $1/y$ per y tendente a 0, limite che non vale 0.

B. Il campo di esistenza è dato dalla condizione $xy \leq 1$, che corrisponde ai punti in grigio nella figura. Il limite esiste e vale 1: basta osservare che

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1,$$

che $(x+1)y \rightarrow 0$, che $xy \rightarrow 0$ e che la funzione $\sqrt{1-xy}$ è continua nell'origine.

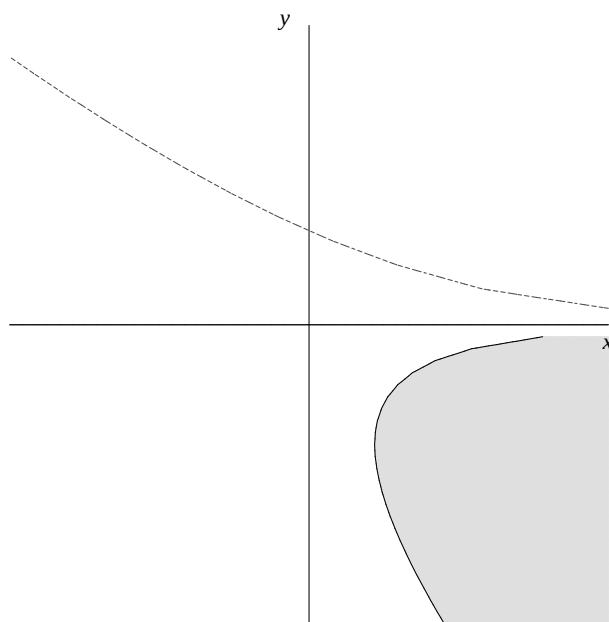
2. Data la funzione

$$f(x, y) = \log(ye^{x+y} + 1),$$

- a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y ;
- b) determinarne le derivate parziali del primo ordine;
- c) determinare l'insieme di annullamento della funzione e quello costituito dai punti in cui la funzione vale 1; rappresentare quest'ultimo nel piano cartesiano x, y .

SOLUZIONE.

a) La funzione f è definita per le coppie (x, y) tali che $ye^{x+y} + 1 > 0$: la disuguaglianza è soddisfatta nel semipiano $y \geq 0$, mentre nel semipiano $y < 0$ equivale a $e^{x+y} < -1/y$, ossia $x < -y - \log(-y)$. La zona grigia nella figura (incluso il bordo) rappresenta la parte di piano in cui la funzione non è definita.



b) Le derivate parziali prime esistono nel campo di esistenza della funzione e sono date da

$$f_x = \frac{ye^{x+y}}{ye^{x+y} + 1},$$

$$f_y = \frac{(1+y)e^{x+y}}{ye^{x+y} + 1}.$$

c) L'insieme di annullamento è costituito dai punti del dominio che rendono uguale a 1 l'argomento del logaritmo: ne segue facilmente che questi punti sono tutti e soli quelli che giacciono sull'asse x . I punti in cui si ha $f(x, y) = 1$ sono tutti e soli quelli le cui coordinate soddisfano l'equazione $ye^{x+y} = e - 1$: osservato che ciò è possibile solo se $y > 0$, l'equazione diventa $x = -y - \log y + \log(e - 1)$, che corrisponde ai punti appartenenti alla linea tratteggiata nella figura.

3. Data la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n! - 1}$,

A. dimostrare che converge,

B. dimostrare che la sua somma è un numero compreso tra 4 e 13 (potrà essere utile sapere che $e^2 \simeq 7.39$, con approssimazione inferiore a 10^{-3}).

SOLUZIONE. A. La serie è a termini positivi e la sua convergenza può essere facilmente dimostrata usando il criterio del rapporto, osservando che il quoziente tra il termine di indice $n + 1$ e quello di indice n tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$, oppure usando il criterio del confronto asintotico, osservando che il termine generale si comporta asintoticamente come $2^n/n!$, che è il termine generale di una serie esponenziale, quindi convergente.

B. Si osservi che, per $n \geq 2$, si ha

$$\frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n}{n! - 1} \leq \frac{2^n}{(n-1)!} :$$

la prima disuguaglianza è ovvia, la seconda scende dal fatto che, per $n \geq 2$,

$$n! - 1 = n(n-1)! - 1 = (n-1)! \left[n - \frac{1}{(n-1)!} \right]$$

e la quantità tra quadre è ovviamente maggiore di 1. Grazie alle due disuguaglianze soddisfatte dal termine generale, si ottiene la seguente doppia disuguaglianza relativa alla somma della serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n! - 1} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!}.$$

La prima serie vale $e^2 - 3$, l'ultima vale $2e^2 - 2$: ricordando il valore approssimato di e^2 , si deduce che il valore approssimato a meno di 10^{-2} della serie intermedia è compreso tra 4.39 e 12.78. Quindi il valore esatto è compreso tra 4 e 13.

4. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{g'(x)}{y^2 + g(x)} dx + \frac{2y}{y^2 + g(x)} dy, \quad \text{dove} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ x^3 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

A. Calcolare gli integrali curvilinei $\int_{\phi} \omega$ e $\int_{\gamma} \omega$, dove ϕ e γ sono le curve di componenti

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [1, \sqrt{2}]; \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [1, 4].$$

B. Verificare l'esattezza della forma differenziale e determinarne una primitiva.

SOLUZIONE. A. Si ha

$$\int_{\phi} \omega = 4 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} dt = 2 \log 2;$$

applicando la sostituzione $s = \sqrt{t}$, si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_1^4 \frac{g'(\sqrt{t})}{g(\sqrt{t})} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_1^2 \frac{g'(s)}{g(s)} ds = \left[\log |g(s)| \right]_1^2 = 3 \log 2.$$

B. La forma differenziale è definita in $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) : x \leq 0, y = 0\}$, che è un insieme stellato. La condizione di uguaglianza delle derivate incrociate è verificata (si osservi che i coefficienti della forma differenziale sono di classe C^2), quindi la forma è esatta. Per determinarne una primitiva F , basta integrare il secondo coefficiente rispetto a y , trovando $F(x, y) = \log(y^2 + g(x)) + h(x)$, dove h è una funzione della sola variabile x : derivando e uguagliando al primo coefficiente della forma differenziale, si trova che h deve essere costante, quindi la generica primitiva di ω è data da $F(x, y) = \log(y^2 + g(x)) + K$, $K \in \mathbb{R}$.