....

Cognome e nome | matricola | Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica II | CALCOLO 2A | 19 marzo 2004

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Date le funzioni

$$f(x) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+x^4}}\,, \qquad g(x) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^4}\,,$$

determinare se esiste e in caso affermativo quanto vale il loro limite per $(x,y) \to (0,0)$.
SOLUZIONE. Il limite della prima funzione esiste e vale 0: passando alle coordinate polari si trova che la frazione è in valore assoluto minore o uguale a $\rho|\sin\theta\cos\theta|$, che tende a 0.
Il limite della seconda funzione esiste e vale 1: infatti per (x,y) vicino ma diverso da $(0,0)$ si ha

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2+x^4} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2+x^4}{\sin(x^2+y^2)}} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)} + \frac{x^4}{\sin(x^2+y^2)}}\,;$$

la prima frazione a denominatore tende a 1 per il noto limite notevole e la seconda tende a zero, poiché

$$\frac{x^4}{\sin(x^2+y^2)} = \frac{x^4}{x^2+y^2}\,\frac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$$

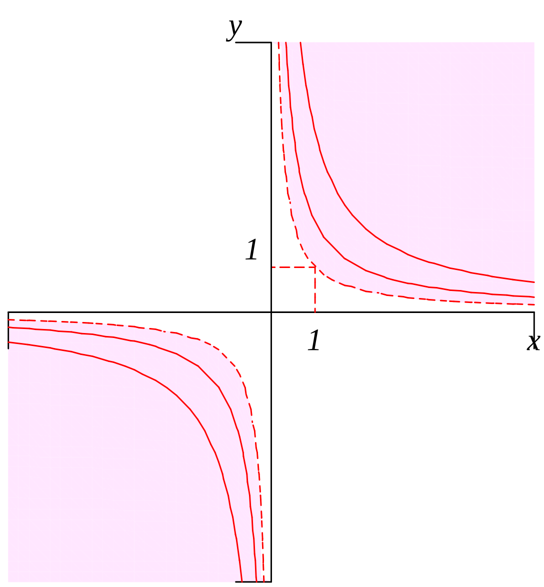
e la prima frazione a secondo membro tende a 0, come si vede subito passando alle coordinate polari.

---

2. Data la funzione

$$f(x,y) = \log(\sqrt{xy} - 1),$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y;
b) determinarne le derivate parziali del primo ordine;
c) determinare gli insiemi di livello e rappresentarli nel piano cartesiano x, y.
SOLUZIONE. a) La funzione f è definita per le coppie (x,y) tali che $xy \geq 0$ e $\sqrt{xy} > 1$, quindi il campo di esistenza è dato dalla zona colorata nella figura: la linea tratteggiata è l'iperbole equilatera.



b) Le derivate parziali prime sono date da

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{y}{2\sqrt{xy}(\sqrt{xy}-1)}\,, \\ f_y = \dfrac{x}{2\sqrt{xy}(\sqrt{xy}-1)}\,. \end{cases}$$

c) Le curve di livello sono date dall'equazione $\log(\sqrt{xy}-1) = K$, al variare di $K \in \mathbb{R}$. Nel campo di esistenza, l'equazione equivale a

$$y = \frac{(1+e^K)^2}{x}\,.$$

Dunque, le curve di livello sono iperboli.
Nella figura sono riportate alcune linee di livello (linea intera).

3. Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\log(n+1)}$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE. Osservato che per $n \geq 2$ si ha $\log(n+1) > 1$, il teorema del confronto assicura che la serie converge assolutamente per tutti i valori di a per i quali converge la serie geometrica di ragione $|a|$, ossia per $|a| < 1$. D'altra parte, per $|a| > 1$ il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi la serie non può convergere. Restano i casi $a = 1$ e $a = -1$: nel primo, la serie diverge (ancora per il criterio del confronto) poiché il termine generale è infinitesimo di ordine inferiore a $1/n$, che è il termine generale di una serie divergente; nel secondo ($a = -1$) si può applicare il criterio di Leibniz, quindi la serie converge semplicemente.

---

4. Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x^2 - y^2}}\, dx + \frac{\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y}}{\sqrt{x^2 - y^2}}\, dy,$$

discuterne l'esattezza e in caso positivo trovare una primitiva.

SOLUZIONE. La forma differenziale è definita in $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ x > 0,\ -x < y < x\}$, che è un insieme stellato rispetto ad ogni suo punto. Pertanto, la forma ω, che è chiusa, è esatta.

Determiniamo una primitiva F: scelto come punto di partenza dell'integrale curvilineo il punto $(1, 0)$, se (x, y) è un punto di D avremo che $F(x, y)$ è data dall'integrale di ω lungo la curva ottenuta saldando il segmento che congiunge $(1, 0)$ a $(x, 0)$ con il segmento che congiunge $(x, 0)$ a (x, y). I due segmenti in questione hanno nell'ordine le seguenti rappresentazioni

$$\begin{pmatrix} 1 + t(x-1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1] \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} x \\ ty \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

pertanto si ha

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^1 \frac{2\sqrt{1 + t(x-1)}}{\sqrt{(1 + t(x-1))^2}}\, (x-1)\, dt + \int_0^1 \frac{\sqrt{x - ty} - \sqrt{x + ty}}{\sqrt{x^2 - t^2 y^2}}\, y\, dt \ = \\ &= \int_0^1 \frac{2(x-1)}{\sqrt{1 + t(x-1)}}\, dt + \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{x + ty}}\, dt - \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{x - ty}}\, dt \ : \end{aligned}$$

applicando le sostituzioni $u = 1 + t(x-1)$, $v = x + ty$ e $w = x - ty$ rispettivamente nel primo, nel secondo e nel terzo integrale dell'ultimo membro, si trova facilmente

$$F(x, y) = 4\Big[\sqrt{u}\Big]_0^x + 2\Big[\sqrt{v}\Big]_x^{x+y} + 2\Big[\sqrt{w}\Big]_x^{x-y} = 2\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x-y}.$$