. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Cognome e nome | matricola | Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

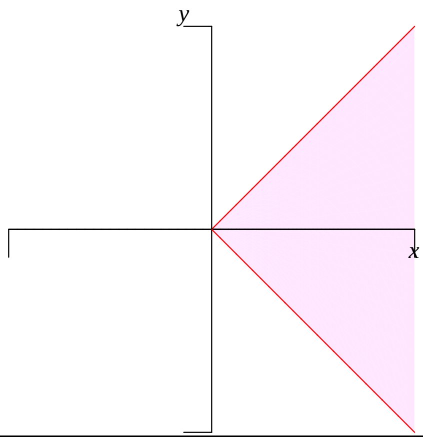
Analisi Matematica II | CALCOLO 2A | 2 aprile 2004

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

**1.** Data la funzione

$$f(x) = \arcsin\frac{y}{x} + \frac{y}{\sqrt{x}} - \log(1+x),$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano $x, y$;
b) determinare se esiste e in caso affermativo quanto vale il limite per $(x, y) \to (0, 0)$.
SOLUZIONE. a) Le condizioni da imporre sono: $x \neq 0$, $|y/x| < 1$, $x > 0$, $1 + x > 0$, pertanto il campo di esistenza è dato da $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ x > 0, \ -x < y < x\}$ (in figura, la zona colorata).




b) Il limite non esiste: la restrizione di $f$ alla retta $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$, è data dalla funzione della sola $x$

$$\arcsin m + m\sqrt{x} - \log(1+x),$$

che tende a $\arcsin m$ per $x \to 0$. Pertanto, il limite della restrizione dipende dalla retta scelta, quindi il limite in due variabili non esiste.

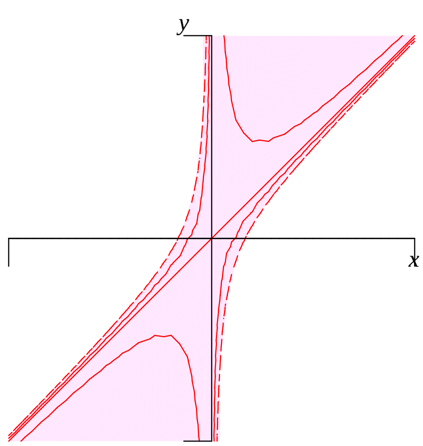
**2.** Data la funzione

$$f(x, y) = \log(1 - x(x-y)),$$

a) determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano $x, y$;
b) determinarne le derivate parziali del primo ordine;
c) determinare gli insiemi di livello e rappresentarli nel piano cartesiano $x, y$.
SOLUZIONE. a) La funzione $f$ è definita per le coppie $(x, y)$ tali che $1 - x(x-y) > 0$, da cui la triplice alternativa:

$$\begin{cases} 1. \quad \text{se } x > 0, \text{ allora deve essere } y > x - (1/x), \\ 2. \quad \text{se } x < 0, \text{ allora deve essere } y < x - (1/x), \\ 3. \quad \text{se } x = 0, \text{ allora } y \text{ è arbitrario.} \end{cases}$$

Il campo di esistenza è dato dalla zona colorata nella figura: la linea tratteggiata è il grafico della funzione $g(x) = x - 1/x$.




b) Le derivate parziali prime sono date da

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{-2x + y}{1 - x(x-y)}, \\ f_y = \dfrac{x}{1 - x(x-y)}. \end{cases}$$

c) Le curve di livello sono date dall'equazione $\log(1 - x(x-y)) = K$, al variare di $K \in \mathbb{R}$. Ove $x \neq 0$, l'equazione equivale a

$$y = x + \frac{e^K - 1}{x}.$$

Inoltre, i punti dell'asse $y$ ($x = 0$) appartengono tutti all'insieme di livello con $K = 0$, che contiene anche la bisettrice del primo e terzo quadrante (e nient'altro). Nella figura sono riportate alcune linee di livello (linea intera).

---

**3.** (A) Discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \arctan n}{2^n}$.

(B) Verificare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n}\,\sqrt{n^3+2n^2-n-2}}$$

e trovarne la somma.

SOLUZIONE. (A) Osservato che, per $n \to +\infty$ si ha $\arctan n \to \pi/2$, il termine generale della serie ha lo stesso comportamento asintotico di $n/2^n$, che è il termine generale di una serie convergente (come si vede, ad es., applicando il criterio del rapporto). Per il criterio del confronto asintotico, anche la serie data converge.
(B) La serie è telescopica: infatti, il termine generale si può scrivere come $b_n - b_{n+1}$, dove

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n+1)}}\,.$$

Pertanto, la serie converge e la sua somma è pari a

$$b_2 - \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

---

**4.** Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{3\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2\sqrt{x}(x-y)}\,dx + \frac{3\sqrt{y}+\sqrt{x}}{2\sqrt{y}(y-x)}\,dy,$$

discuterne l'esattezza e in caso positivo trovare una primitiva.
SOLUZIONE. (a) Il campo di esistenza $D$ di $\omega$ è costituito dall'insieme $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x > 0,\ y > 0,\ y \neq x\}$ (ossia, dal primo quadrante aperto privato della bisettrice). Poiché $D$ è un insieme aperto non connesso per archi, occorre discutere l'esattezza nelle due parti connesse di cui si compone, separate dalla bisettrice. Ognuna di esse è un insieme aperto e semplicemente connesso, inoltre $\omega$ è chiusa, quindi è anche esatta in ciascuna delle parti connesse di $D$, quindi in $D$. Determiniamo una primitiva $F$ nella parte di $D$ compresa tra la bisettrice e l'asse $x$. Se $(x_0, y_0)$ è un punto dell'insieme in questione, $F(x_0, y_0)$ sarà data dall'integrale di $\omega$ lungo una curva regolare a tratti che congiunge $(2,1)$ a $(x_0, y_0)$ e che è a valori in $D$: ad esempio, possiamo scegliere una poligonale composta da segmenti paralleli agli assi. Per fissare le idee, supponiamo che $x_0 > 1$: in questo caso, la poligonale ottenuta saldando il segmento che congiunge $(2,1)$ a $(x_0, 1)$ con il segmento che congiunge $(x_0, 1)$ a $(x_0, y_0)$ è contenuta in $D$. I due segmenti in questione hanno nell'ordine le seguenti rappresentazioni

$$\begin{pmatrix} tx_0 + 2(1-t) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + t(x_0-2) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ ty_0 + (1-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 + t(y_0-1) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1].$$

Pertanto, applicando le sostituzioni $s = \sqrt{2+t(x_0-2)}$ e $v = \sqrt{1+t(y_0-1)}$ rispettivamente nel primo e nel secondo integrale, si ha

$$\begin{aligned} F(x_0,y_0) &= \int_0^1 \frac{3\sqrt{2+t(x_0-2)}+1}{2\sqrt{2+t(x_0-2)}(2+t(x_0-2)-1)}\,(x_0-2)\,dt + \\ &+ \int_0^1 \frac{3\sqrt{1+t(y_0-1)}+\sqrt{x_0}}{2\sqrt{1+t(y_0-1)}(1+t(y_0-1)-x_0)}\,(y_0-1)\,dt = \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x_0}} \frac{3s+1}{s^2-1}\,ds + \int_1^{\sqrt{y_0}} \frac{3v+\sqrt{x_0}}{v^2-x_0}\,dv = \log|y_0-x_0| + \log|\sqrt{y_0}-\sqrt{x_0}| - \log(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

Pertanto, detto $(x,y)$ il generico punto della parte di $D$ che stiamo considerando, si ha $F(x,y) = \log|y-x| + \log|\sqrt{y}-\sqrt{x}| - \log(\sqrt{2}-1)$. Allo stesso risultato si perviene se $x_0 \leq 1$ (in questo caso, il cammino di integrazione precedente uscirebbe dal dominio: al calcolo si presta invece la poligonale ottenuta saldando il segmento che congiunge $(2,1)$ a $(2,y_0)$ con il segmento che congiunge $(2,y_0)$ a $(x_0,y_0)$); infine, tutte le altre primitive nella parte di $D$ considerata sono date da $F+k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Una primitiva nella rimanente parte di $D$ può essere determinata in modo analogo e la formula finale risultante è formalmente la medesima (la costante arbitraria potendo essere diversa da quella precedente).