PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II. 22 Giugno 2004.

....

Cognome e nome firma Corso di laurea

1. Discutere la convergenza delle seguenti serie e, se possibile, calcolarne la somma
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n(n+3)} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{4^n}$$

2. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione
$$f(x,y) = \log(4x^2 + 4y^2 - 1) + \frac{\sqrt{y - x^2 + 1}}{\sqrt{2 - y}}$$
e rappresentarlo graficamente.

3. Identificare e classificare i punti critici della funzione
$$f(x,y) = x^2y^2 - x \log y$$

4. Scrivere il differenziale della funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$$\vec{f}(x,y) = (x + y^2)\vec{i} - 2xy\,\vec{j}$$
nel punto $P(-1,1)$.

SOLUZIONE

1. La prima è una serie telescopica che può essere riscritta nel seguente modo
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n(n+3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right).$$
La somma ridotta n-esima è
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$
da cui si conclude che la serie è convergente con somma
$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$
La seconda serie converge per il criterio del rapporto, infatti
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^2}{4^{n+1}} \frac{4^n}{n^2} = \frac{1}{4} < 1.$$

2. Le condizioni di esistenza della funzione sono espresse dal seguente sistema di disequazioni
$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 1 > 0 \\ y - x^2 + 1 \geq 0 \\ 2 - y > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 > \frac{1}{4} \\ y \geq x^2 - 1 \\ y < 2 \end{cases}$$
Il dominio della funzione è quindi l'interno della parabola di equazione $y = x^2 - 1$ posto al di sotto della retta $y = 2$ e privato del cerchio di centro l'origine e raggio $1/2$. Il bordo del cerchio e la retta $y = 2$ sono esclusi dal dominio mentre la parabola $y = x^2 - 1$ è compresa.

3. I punti critici della funzione sono individuati dal sistema
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0} \longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2xy^2 - \log y = 0 \\ 2x^2 y - \frac{x}{y} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2xy^2 - \log y = 0 \\ x(2xy^2 - 1) = 0 \end{cases}$$
che ha le due soluzioni $A(0,1)$ e $B(\frac{1}{2e^2}, e)$.
La matrice hessiana nel generico punto (x,y) è
$$\mathbb{H}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy - \frac{1}{y} \\ 4xy - \frac{1}{y} & 2x^2 + \frac{x}{y^2} \end{bmatrix}$$

Di qui si ha che

$$\mathbb{H}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \det\mathbb{H}(A) = -1,$$

per cui $A(0,1)$ è un **punto di sella**. Per quanto riguarda il punto B, si ha

$$\mathbb{H}(B) = \begin{bmatrix} 2e^2 & e^{-1} \\ e^{-1} & e^{-4} \end{bmatrix} \longrightarrow \det\mathbb{H}(B) = e^{-2} > 0,$$

inoltre,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = 2e^2 > 0$$

per cui $B(\frac{1}{2e^2}, e)$ è un **punto di minimo relativo**.
Il grafico della funzione è riportato nella figura seguente

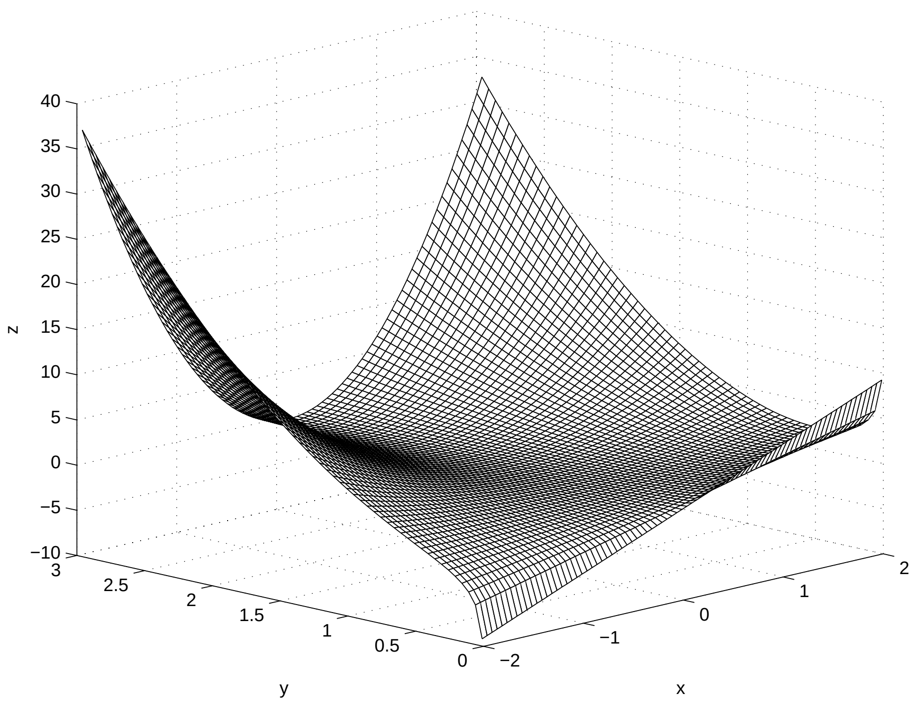

Figura 1: rappresentazione della funzione $f(x,y) = x^2y^2 - x\log y$

4. Il differenziale di $\vec{f}(x,y)$ nel punto P è dato da

$$\vec{df}(P) = \mathbb{J}(P) \cdot \vec{h}$$

dove $\mathbb{J}(P)$ è la matrice jacobiana calcolata nel punto P e $\vec{h} = h_1\vec{i} + h_2\vec{j}$ è l'incremento.
Si ha

$$\mathbb{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ -2y & -2x \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbb{J}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\vec{df}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 + 2h_2 \\ -2h_1 + 2h_2 \end{bmatrix}$$