....

Cognome e nome matricola Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica II CALCOLO 2A 16 dicembre 2004

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Discutere la convergenza delle seguenti serie e, se possibile, calcolarne la somma $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n(n+2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

SOLUZIONE. Posto $m = n+1$, la prima serie assume una forma telescopica come segue:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n(n+2)} = 3 \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(m-1)(m+1)} = \frac{3}{2} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1+m-m+1}{(m-1)(m+1)} = \frac{3}{2} \sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+)}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) = \frac{3}{2} \left[\sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{1}{m-)} - \frac{1}{m}\right) + \sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] = \frac{5}{4} .$$

La seconda serie converge per il criterio della radice, infatti

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2} , \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

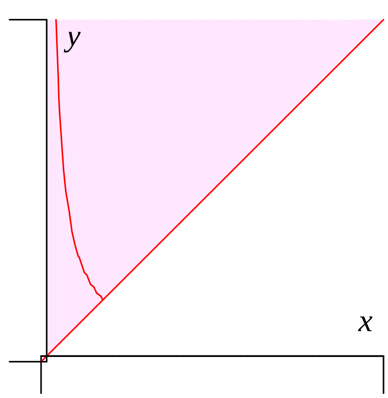
---

2. Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{\log(x\sqrt{y-x})}{xy-1} ,$$

determinarne il campo di esistenza e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y;

SOLUZIONE. La funzione f è definita per le coppie (x, y) tali che $x\sqrt{y-x} > 0$, $y - x \geq 0$ e $xy \neq 1$, quindi il campo di esistenza è dato dalla zona colorata nella figura: la linea curva è un tratto dell'iperbole equilatera, che è escluso dal dominio.



---

3. Individuare e classificare i punti critici della funzione $g(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.
SOLUZIONE. La funzione è definita in $\mathbf{R}^2$ ed è di classe $\mathbf{C}^\infty$. Le derivate parziali sono

$$g_x(x, y) = 6x^2 - 6y \qquad \text{e} \qquad g_y(x, y) = -6x + 6y :$$

i punti critici (quelli in cui si annullano entrambe le derivate) sono tutti e soli quelli che appartengono contemporaneamente alla parabola $y = x^2$ e alla retta $y = x$, ossia $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Le derivate seconde sono

$$g_{xx}(x, y) = 12x, \qquad g_{xy}(x, y) = -6, \qquad g_{yy}(x, y) = 6$$

pertanto la matrice hessiana nei punti critici è data da

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ (indefinita)} \qquad M(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ (definita positiva)}$$

di conseguenza $(0, 0)$ è un punto sella e $(1, 1)$ è un punto di minimo relativo.

---

4. Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$h(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$$

nel punto $P = (0, 1)$ lungo le direzioni individuate dai vettori $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ e $\vec{v} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.
SOLUZIONE. La funzione è definita in $\mathbf{R}^2$ ed è di classe $\mathbf{C}^\infty$ e le derivate parziali sono

$$h_x(x, y) = 2y^3 + 2xy^2 \qquad \text{e} \qquad h_y(x, y) = 4y^3 + 6xy^2 + 2x^2y.$$

Posto $\vec{w} = \vec{u}/|\vec{u}| = \vec{u}/\sqrt{2}$ e $\vec{z} = \vec{v}/|\vec{v}| = \vec{v}/\sqrt{5}$, si ha

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{w}}(0, 1) = h_x(0, 1)w_1 + h_y(0, 1)w_2 = 2w_1 + 4w_2 = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

e

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{z}}(0, 1) = h_x(0, 1)z_1 + h_y(0, 1)z_2 = 2z_1 + 4z_2 = 2\sqrt{5}.$$