PROVA SCRITTA DI CALCOLO II. 7 gennaio 2005.

....

Cognome e nome | firma | Corso di laurea

1. Discutere la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+5^n}{6^n} \qquad\qquad \sum_{n-0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$$

   e, se possibile, calcolarne la somma.

2. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{\arcsin(x+y)}{\sqrt{y-x^2+1}},$$

   e rappresentarlo graficamente.

3. Determinare e classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

4. Calcolare la derivata direzionale della funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 3x^4 - xy + y^3,$$

   nel punto $P(1,2)$ lungo una direzione che forma con l'asse Ox un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

SOLUZIONE

1. La prima serie può essere riscritta nel modo seguente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+5^n}{6^n} = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n .$$

La serie è convergente essendo una combinazione di due serie geometriche convergenti. La sua sua somma S vale

$$S = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}} - 1\right) + \left(\frac{1}{1-\frac{5}{6}} - 1\right) = \frac{3}{5} + 5 = \frac{28}{5}.$$

La seconda serie si ottiene dallo sviluppo in serie della funzione esponenziale

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

per il valore $x = 2$. La serie è, pertanto, convergente e ha come somma $S = e^2$.

2. L'insieme di definizione è individuato dalle condizioni

$$\begin{cases} -1 \le x+y \le 1 \\ y - x^2 + 1 > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -x-1 \le y \le -x+1 \\ y > x^2 - 1 \end{cases}$$

L'insieme di definizione cercato è quindi l'intersezione tra la striscia di piano compresa tra le rette di equazione $y = -x-1$ e $y = -x+1$ e la regione situata al di sopra della parabola di equazione $y = x^2 - 1$. Per quanto riguarda il bordo, i tratti di parabola sono esclusi mentre i segmenti di retta sono compresi.

3. I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} ,$$

le cui soluzioni sono l'origine $O(0,0)$ e il punto $A(1,1)$.
La matrice hessiana è

$$\mathbb{H}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix} \longrightarrow \det\mathbb{H}(x,y) = 36xy - 9.$$

Di qui si ha che $\det\mathbb{H}(0,0) = -9$ per cui l'origine è un **punto di sella**. Inoltre $\det\mathbb{H}(1,1) = 27$ e dal momento che $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6$, si conclude che il punto $A(1,1)$ è un **punto di minimo relativo**.

4. Il versore direzionale è

$$\vec{u} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{\imath} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}.$$

La funzione è differenziabile nel punto P, per cui si ha

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{u} = (10\vec{\imath} + 11\vec{\jmath}) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) = 5 + \frac{11}{2}\sqrt{3}.$$