. . . .

Cognome e nome | matricola | Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica II | CALCOLO 2A | 1 aprile 2005

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Discutere la convergenza delle seguenti serie e, se possibile, calcolarne la somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{n^2+1} \right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2+7n+12}$$

SOLUZIONE. La prima serie diverge per il criterio della radice: infatti, indicando con a_n il termine generale, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{n^2+1} = 3.$$

Il termine generale della seconda serie può essere scritto come

$$\frac{5}{n^2+7n+12} = \frac{5}{(n+3)(n+4)} = 5\frac{n+4-(n+3)}{(n+3)(n+4)} = 5\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right),$$

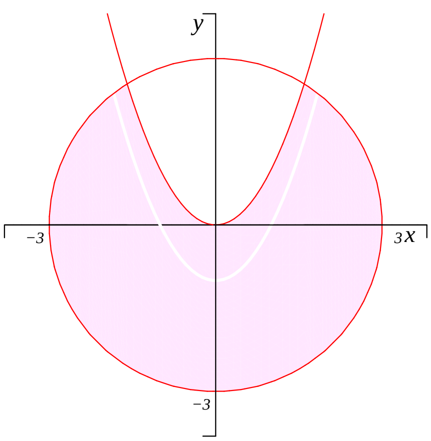
dunque come differenza $b_n - b_{n+1}$, dove

$$b_n = \frac{5}{n+3}\,.$$

Pertanto, la serie è telescopica convergente e la sua somma è pari a

$$b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{5}{4}\,.$$

2.



Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{\log(x^2-y)}$$

e rappresentarlo in modo COMPRENSIBILE nel piano cartesiano x, y.
SOLUZIONE. La funzione f è definita per le coppie (x,y) tali che $9-x^2-y^2 \geq 0$, $x^2-y>0$ e $x^2-y \neq 1$, ossia appartenenti al cerchio di centro l'origine e raggio 3 e poste al di sotto della parabola di equazione $y = x^2$, con esclusione della parabola di equazione $y = x^2-1$. Il campo di esistenza è dato dalla zona colorata nella figura; per quel che riguarda il bordo, la funzione è definita solo sull'arco di circonferenza ove questa non incontra la parabola $y = x^2-1$ (che nella figura appare come una linea bianca); le altre parti di bordo sono escluse dal campo di esistenza.

---

3. Identificare e classificare i punti critici della funzione $\quad g(x,y) = \frac{x^3}{3} - y^2 - 4xy$.
SOLUZIONE. Le derivate parziali sono

$$g_x = x^2 - 4y, \quad g_y = -2y - 4x, \qquad g_{xx} = 2x, \quad g_{xy} = -4, \quad g_{yy} = -2.$$

Pertanto, i punti critici sono $P_0 = (0,0)$ e $P_1 = (-8,16)$. La matrice hessiana nei due punti critici è rispettivamente

$$H(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad H(P_1) = \begin{pmatrix} -16 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}:$$

la prima è indefinita (quindi P_0 è un punto sella), la seconda è definita negativa (quindi di P_1 è un punto di massimo relativo).

---

4. Si consideri la funzione
$$f(x,y) = \sqrt[3]{y^2(x-1)} + 1$$

- Dire se f è differenziabile nel punto $P = (0,1)$.
- Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico in P.
- Calcolare la derivata direzionale di f in P lungo la direzione del generico versore $\vec{v} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$.

SOLUZIONE.

- La funzione f può essere espressa come $f = h \circ g + k$, dove

$$\begin{cases} g: \ \mathbf{R}^2 \to \mathbb{R} \\ g: \ (x,y) \mapsto y^2(x-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} h: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ h: \ z \mapsto \sqrt[3]{z} \end{cases} \qquad \begin{cases} k: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ k: \ t \mapsto 1. \end{cases}$$

  La prima e la terza funzione sono ovviamente di classe $\mathbf{C}^1$; la seconda lo è ad eccezione di $z = 0$. Poiché $g(P) = -1 \neq 0$, allora nell'intorno di P la funzione f è di classe $\mathbf{C}^1$, quindi differenziabile per il teorema del differenziale totale.
- Le derivate parziali di f sono:

$$f_x = \frac{1}{3}\frac{y^2}{\left(\sqrt[3]{y^2(x-1)}\right)^2} \qquad f_y = \frac{2}{3}\frac{y(x-1)}{\left(\sqrt[3]{y^2(x-1)}\right)^2}\,, \qquad \text{da cui} \quad f_x(P) = \frac{1}{3}\,, \quad f_y(P) = -\frac{2}{3}\,.$$

  In generale, l'equazione del piano tangente al grafico in (x_0, y_0) è la seguente

$$z = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0):$$

  nel nostro caso
$$z = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}(y-1).$$

- La derivata direzionale di una funzione di classe $\mathbf{C}^1$ in un punto (x_0, y_0) lungo la direzione $\vec{v}$ è pari a $\nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{v}$: nel nostro caso si ottiene
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = f_x(P)\cos\theta + f_y(P)\sin\theta = \frac{1}{3}\cos\theta - \frac{2}{3}\sin\theta.$$