PROVA SCRITTA DI CALCOLO II. 27 giugno 2005.

....

Cognome e nome firma Corso di laurea

1. Discutere la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{3n^2+4n+1}\right)^n \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n+(-1)^n 4^n}{n!}$$

   e, se possibile, calcolarne la somma.

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x}\,\log(y+x^2)}{e^{\sin\sqrt{x}}}$$

   e rappresentarlo graficamente.

3. Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$g(x,y) = (x\log x)(y-2) - \frac{y^2 e}{4}.$$

4. Stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ converge l'integrale improprio

$$I_n = \int_2^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(x^2-1)^3}\,dx$$

   e calcolarlo per il più grande di essi.

SOLUZIONE.

1. Il termine generale della prima serie è asintotico a $\frac{1}{n^2}$, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = 1 :$$

poichè la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, si ha che la serie iniziale converge per il criterio del confronto asintotico.
Nel secondo caso si può applicare il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+2n+1}{3n^2+4n+1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+2n+1}{3n^2+4n+1} = \frac{2}{3}.$$

Poichè il valore di questo limite è minore di uno, la serie converge.
La terza serie è convergente in quanto somma di due serie esponenziali.
La sua somma è

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n+(-1)^n 4^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{n!} = \left(e^2-1-2\right)+\left(e^{-4}-1+4\right) = e^2+e^{-4}.$$

2. Il dominio della funzione coincide con l'insieme soluzione del seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x \geq 0 \\ y+x^2>0 \\ x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2 \geq 1 \\ y>-x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

La prima disequazione è risolta all'esterno della circonferenza di centro il punto $C(1,0)$ e raggio 1; la seconda è risolta nella regione posta al di sopra della parabola di equazione $y=-x^2$. L'ultima disequazione è risolta nel semipiano delle ascisse positive. Il dominio della funzione è l'intersezione di queste tre regioni. Per quanto riguarda la frontiera, la circonferenza e l'asse delle ordinate (origine esclusa) sono incluse, mentre è esclusa la parabola $y=-x^2$.

3. I punti critici vanno cercati tra le soluzioni dell'equazione

$$\vec{\nabla} g = \vec{0} \longrightarrow \begin{cases} (\log x+1)(y-2)=0 \\ x\log x - \frac{ye}{2} = 0 \end{cases}.$$

Di qui si trovano i punti $A(e,2)$ e $B(e^{-1}, -2e^{-2})$.
Le derivate parziali seconde sono

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{y-2}{x} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{e}{2} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = 1 + \log x,$$

da cui si ricava la matrice hessiana nei punti A e B

$$\mathbb{H}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -\frac{e}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \det \mathbb{H}(A) = -4 \longrightarrow A \text{ è un punto di sella}$$

$$\mathbb{H}(B) = \begin{bmatrix} \frac{-2e^{-2}-2}{e^{-1}} & 0 \\ 0 & -\frac{e}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \det \mathbb{H}(B) = e^2(e^{-2}+1) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(B) = \frac{-2e^{-2}-2}{e^{-1}} < 0 \end{cases} \longrightarrow B \text{ è un punto di massimo}$$

Il grafico della funzione è riportato nella figura seguente

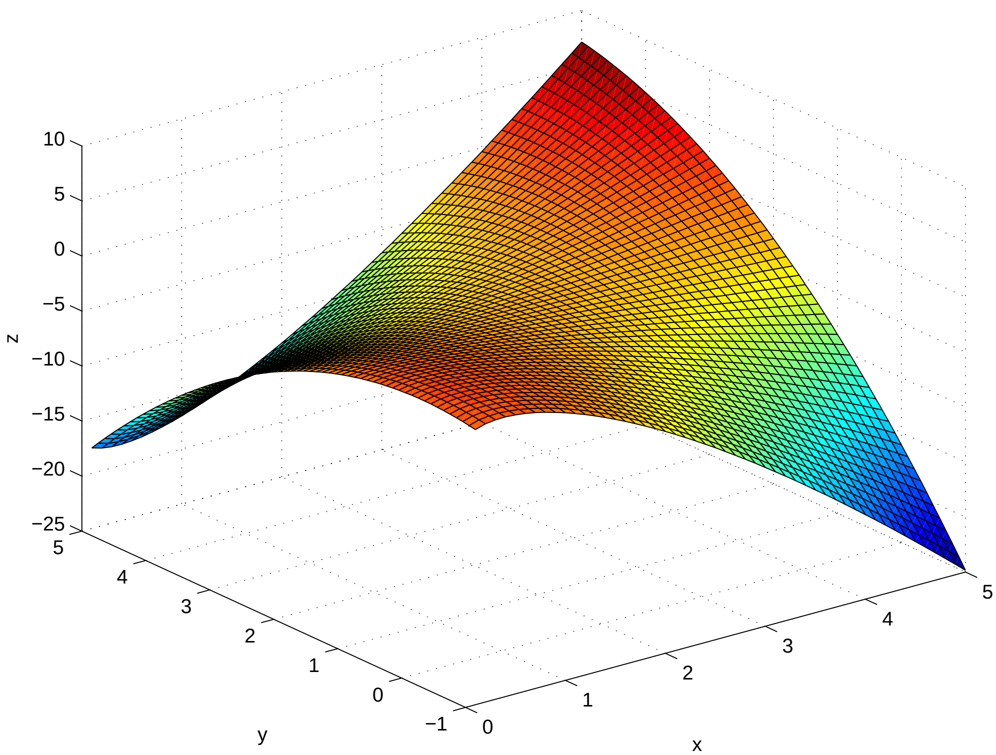

Figura 1: grafico della funzione $g(x,y) = (x \log x)(y-2) - \frac{y^2 e}{4}$.

4. Si vede facilmente che la funzione integranda è asintotica a x^{2n-7}, per cui l'integrale converge quando

$$2n - 7 < -1 \longrightarrow 2n < 6 \longrightarrow n < 3.$$

Pertanto il più grande intero per cui si ha convergenza è $n = 2$. A questo punto occorre calcolare l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^3}{(x^2-1)^3}\, dx.$$

Ponendo

$$x^2 - 1 = t \longrightarrow 2x dx = dt,$$

l'integrale diventa

$$\frac{1}{2}\int_3^{+\infty} \frac{(t+1)}{t^3}\, dt = \frac{1}{2}\int_3^{+\infty} (t^{-2} + t^{-3})\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\int_3^a (t^{-2} + t^{-3})\, dt = \frac{1}{2}\lim_{a\to+\infty}\left[-t^{-1} - \frac{1}{2}t^{-2}\right]_3^a = \frac{7}{36}.$$