PROVA SCRITTA DI CALCOLO II. 25 luglio 2005.

....

Cognome e nome   firma   Corso di laurea

1. Discutere la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n + n}{4n^3} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n^\alpha} \ \ (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0)$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y - x^2}{x - y^2}},$$

e rappresentarlo graficamente.

3. Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$g(x,y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

4. Calcolare i seguenti integrali impropri

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6}\, dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx.$$

SOLUZIONE.

1. La prima serie può essere riscritta come

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n + n}{4n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{4n^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2}.$$

   La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{4n^3}$ converge assolutamente in quanto

$$\left|\frac{\cos n}{4n^3}\right| \leq \frac{1}{4n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

   e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^3}$ è convergente. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2}$ è convergente, per cui la serie inziale converge in quanto somma di serie convergenti.
   Nel secondo caso, essendo la serie a termini positivi, è possibile applicare il criterio del rapporto. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \frac{n^\alpha}{\alpha^n} = \lim_{n\to\infty} \alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \alpha,$$

   da cui si conclude che

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 1 & \text{converge} \\ \alpha > 1 & \text{diverge} \end{cases}.$$

   Se $\alpha = 1$ si ha la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ che è divergente.

2. il dominio della funzione è individuato dalla condizione

$$\frac{y - x^2}{x - y^2} \geq 0.$$

   Questo accade quando il numeratore e il denominatore sono entrambi postivi oppoure entrambi negativi. Si tratta, pertanto, di risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ x - y^2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y - x^2 \leq 0 \\ x - y^2 < 0 \end{cases}.$$

   Il primo sistema è risolto nell'intersezione tra la regione posta al di sopra della parabola di equazione $y = x^2$ e la regione posta a destra della parabola di equazione $x = y^2$. Il secondo sistema è risolto nell'intersezione tra la regione posta al di sotto della parabola di equazione

$y = x^2$ e la regione posta sinistra della parabola di equazione $x = y^2$. Il dominio della funzione risulta pertanto essere l'unione di questi due insiemi. Per quanto riguarda la frontiera, la parabola $y = x^2$ è inclusa nel dominio mentre rimane esclusa la curva $x = y^2$.

3. Le derivate parziali prime della funzione g sono

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2) \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -2xye^{-(x^2+y^2)}.$$

I punti critici vanno cercati tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2) = 0 \\ -2xye^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases} .$$

Si trovano facilmente i due punti $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.
Le derivate parziali seconde sono

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -2x(3-2x^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -2x(1-2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -2y(1-2x^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

A questo punto è possibile costruire la matrice hessiana nei punti A e B. Si ha

$$\mathbb{H}(A) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{\frac{2}{e}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{e}} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \det\mathbb{H}(A) = \frac{4}{e} > 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(A) = 2\sqrt{\frac{2}{e}} > 0 \end{cases} \longrightarrow A \text{ è un punto di minimo}$$

$$\mathbb{H}(B) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{\frac{2}{e}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{e}} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \det\mathbb{H}(B) = \frac{4}{e} > 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(B) = -2\sqrt{\frac{2}{e}} < 0 \end{cases} \longrightarrow B \text{ è un punto di massimo}$$

Il grafico della funzione è riportato nella figura seguente

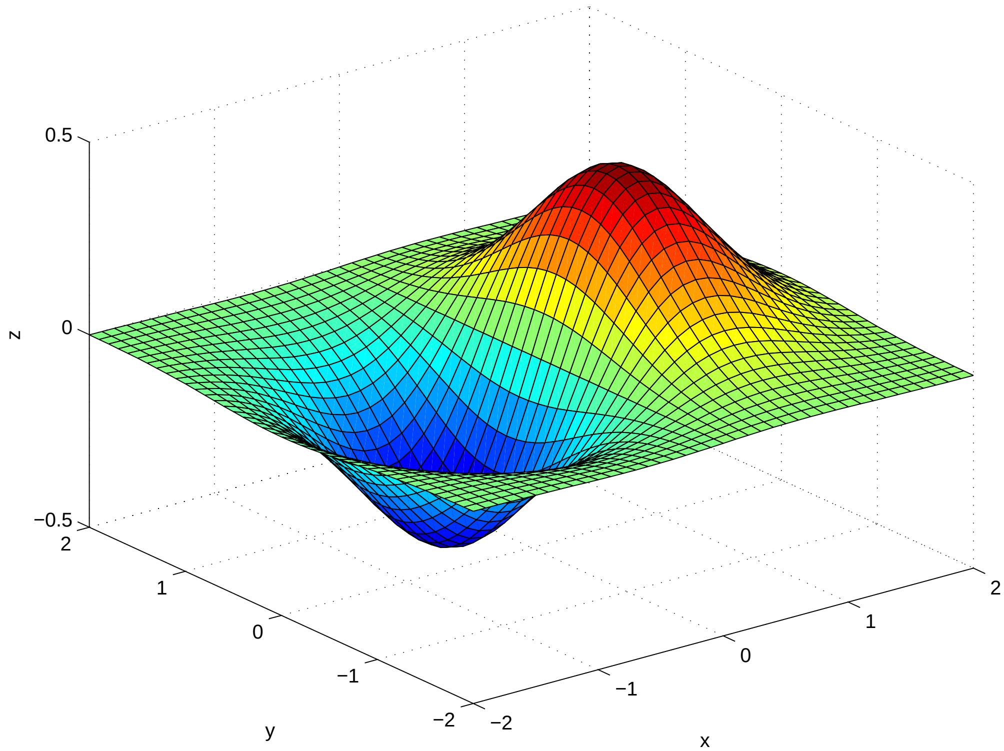

Figura 1: grafico della funzione $g(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$.

4. Nel primo caso si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{(x+2)(x+3)}\,dx =$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\int_1^t \frac{1}{x+2}\,dx - \int_1^t \frac{1}{x+3}\,dx\right] = \lim_{t\to+\infty} \left[\log\left(\frac{t+2}{t+3}\right) + \log\frac{4}{3}\right] = \log\frac{4}{3}.$$

Il secondo integrale è

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\arctan^2 t\right] = \frac{\pi^2}{8}.$$