PROVA SCRITTA DI CALCOLO II. 19 settembre 2005.

....

Cognome e nome firma Corso di laurea

1. Discutere la convergenza delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{2^{nx}} \quad x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n - n\cos\frac{1}{n} \right)$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \log[(y+x)(x^2-y)]$$

e rappresentarlo graficamente.

3. Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$g(x) = x^3 + y^3 - 3xy$$

4. Calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\, dx$$

SOLUZIONE.

1. Nel primo caso si può scrivere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{2^{nx}} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{nx}}.$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{nx}},$$

è a termini positivi per cui a essa si può applicare il criterio del rapporto. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{2^{(n+1)x}} \frac{2^{nx}}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} 2^{-x} = 2^{-x}.$$

Di qui si conclude che se $2^{-x} < 1$, cioè se $x > 0$, la serie data è convergente (essendo il prodotto tra un numero positivo e una serie convergente). Se $2^{-x} > 1$, cioè se $x < 0$, la serie data è divergente (essendo il prodotto tra un numero negativo e una serie divergente). Se $x = 0$ la serie converge in quanto i suoi addendi sono tutti nulli.
Nel secondo caso la serie è divergente in quanto il suo termine generale è asintotico a $\frac{1}{n}$ che è il termine generale della serie armonica. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

2. L'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo. Questo avviene quando i due fattori sono entrambi postivi oppure entrambi negativi. Il dominio della funzione è l'unione degli insiemi soluzione dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} y+x>0 \\ x^2-y>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y+x<0 \\ x^2-y<0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} y>-x \\ y<x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y<-x \\ y>x^2 \end{cases}$$

3. Le derivate parziali prime della funzione g sono

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3(x^2 - y) \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 3(y^2 - x).$$

I punti critici vanno cercati tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}.$$

Si trovano facilmente i due punti $A(0,0)$ e $B(1,1)$.
Le derivate parziali seconde sono

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -3.$$

A questo punto è possibile costruire la matrice hessiana nei punti A e B. Si ha

$$\mathbb{H}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \det\mathbb{H}(A) = -9 < 0 \longrightarrow A \text{ è un punto di sella}$$

$$\mathbb{H}(B) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \det\mathbb{H}(B) = 27 > 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(B) = 6 > 0 \end{cases} \longrightarrow B \text{ è un punto di minimo}$$

Il grafico della funzione è rappresentato nella pagina seguente.

4. L'integrale può essere scritto come

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\, dx.$$

L'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\, dx$$

può essere calcolato usando la sostituzione

$$\sqrt{x+1} = u \longrightarrow x = u^2 - 1 \longrightarrow dx = 2u du,$$

per cui

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{2u}{u^2+1}\frac{1}{u}\, du = 2\int \frac{1}{1+u^2}\, du = 2\arctan u + C = 2\arctan\sqrt{x+1} +$$

Quindi

$$\int_0^t \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\, dx = 2\arctan\sqrt{t+1} - 2\arctan 1 = 2\arctan\sqrt{t+1} - \frac{\pi}{2}.$$

L'integrale dato è quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}}\, dx = \lim_{t\to+\infty} 2\arctan\sqrt{t+1} - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

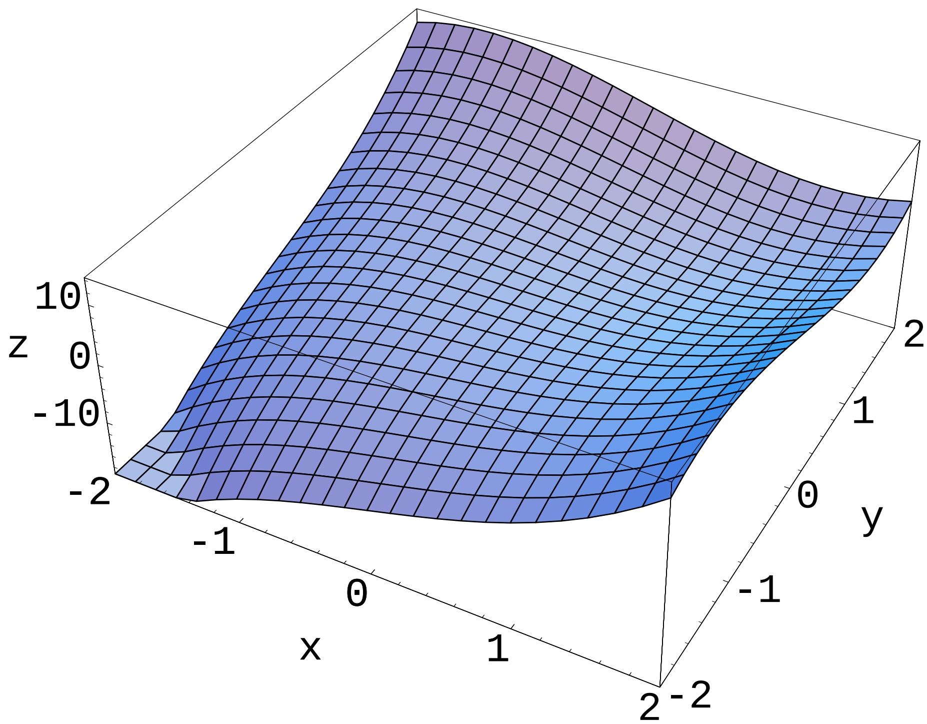

Figura 1: grafico della funzione $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.