....

Cognome e nome matricola Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica II CALCOLO 2A 14 dicembre 2005

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche

(A) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^3 \log n + 3}$; (B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 5^n}{n!}$; (C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+}}$.

SOLUZIONE. Le tre serie assegnate convergono. Infatti

(A) Il termine generale della serie è asintotico a $1/(n^2 \log n)$, che è il termine generale di una serie convergente (per il criterio del confronto, in quanto $1/(n^2 \log n) < 1/n^2$ e la serie $\sum 1/n^2$ converge). Dunque, la serie data converge.

(B) Si può applicare il criterio del rapporto:

$$\frac{(n+1)^2 5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 5^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{5}{n+1} \ :$$

l'ultima quantità tende a 0 per $n \to +\infty$, quindi la serie data converge.

(C) Si può applicare il criterio di Leibniz: le ipotesi sono soddisfatte, quindi la serie converge.

---

2. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio e, se possibile, calcolarlo: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3}{x^2+6x+8}\, dx.$

SOLUZIONE. La funzione integranda è asintotica a $3/x^2$ per $x \to +\infty$, quindi l'integrale converge per il criterio del confronto asintotico. Il valore dell'integrale si trova come segue: anzitutto si decompone la funzione razionale fratta nella somma di fratti semplici (le radici del denominatore sono $x = 2$ e $x = 4$)

$$\frac{3}{x^2+6x+8} = \frac{3}{2}\frac{1}{x+2} - \frac{3}{2}\frac{1}{x+4} \ ,$$

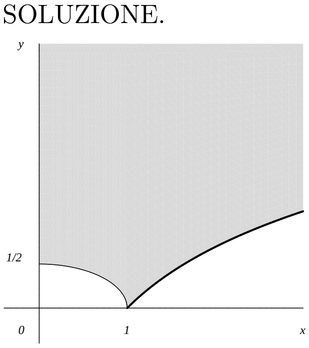
quindi si procede così

$$\int_0^{+\infty} \frac{3}{x^2+6x+8}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{3}{x^2+6x+8}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{3}{2} \int_0^b \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}\right) dx =$$
$$= \frac{3}{2} \lim_{b\to+\infty} \left[\log \frac{x+2}{x+4}\right]_0^b dx = \frac{3}{2} \log 2.$$

---

3. Determinare il dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{y - \log x}\ \log(x^2 + 4y^2 - 1)$ e rappresentarlo graficamente.

SOLUZIONE.



Le tre condizioni da imporre sono: $x > 0$, $y - \log x \geq 0$ e $x^2 + 4y^2 - 1 > 0$. Geometricamente, occorre intersecare il semipiano delle ascisse positive con la parte che sta sopra il grafico della funzione $\log x$ e con l'esterno dell'ellisse di centro l'origine e semiassi 1 e 1/2. Il dominio è rappresentato in grigio nella figura: esso contiene solo quella parte del bordo, evidenziata con tratto più marcato, che coincide con il grafico della funzione $\log x$ per $x > 1$.

---

4. E' data la funzione $g(x,y) = e^x(2x^2 - xy + y^2)$.

(A) Determinare e classificare i punti critici di g.

(B) Verificare che g è differenziabile in $P = (1,1)$ e scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di g in $(P, g(P))$.

SOLUZIONE.

(A) La funzione g è di classe $\mathbf{C}^k$ in $\mathbf{R}^2$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Le sue derivate parziali sono date da:

$$g_x(x,y) = e^x(2x^2 - xy + y^2 + 4x - y), \qquad g_y(x,y) = e^x(-x + 2y),$$
$$g_{xx}(x,y) = e^x(2x^2 - xy + y^2 + 8x - 2y + 4), \qquad g_{yy}(x,y) = 2e^x, \qquad g_{xy}(x,y) = e^x(-x + 2y - 1).$$

Pertanto i punti critici sono $P_0 = (0,0)$ e $P_1 = (-2,-1)$, con matrice hessiana

$$M(P_0) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M(P_1) = e^{-2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}:$$

la prima è definita positiva, la seconda è indefinita. Pertanto, P_0 è un punto di minimo relativo mentre P_1 è un punto sella.

(B) Si ha

$$g(1,1) = 2e, \qquad g_x(1,1) = 5e, \qquad g_y(1,1) = e,$$

pertanto piano tangente al grafico di g in $(P, g(P))$ ha equazione $z = 5e(x-1) + e(y-1) + 2e$.