PROVA SCRITTA DI CALCOLO II. 15 febbraio 2006.

....

Cognome e nome | firma | Corso di laurea

1. Discutere la convergenza delle seguenti serie e, se possibile, calcolarne la somma
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n+1} - 5^n}{7^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n) \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}.$$

2. Determinare il dominio della funzione
$$f(x, y) = \sqrt{y + e^x} + \log(x^2 - y),$$
e rappresentarlo graficamente.

3. Sia data la funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$g(x, y) = xye^{-\frac{x}{3} - \frac{y}{4}}.$$
   - Classificare i punti critici di g.
   - Dopo aver verificato che g è differenziabile in $P(0, 1)$, scrivere l'equazione cartesiana del piano π tangente al grafico della funzione in P.

4. Per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio
$$\int_2^{+\infty} \left(\frac{\alpha x}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x + 1}\right) dx$$
converge. Determinare α e calcolare l'integrale.

1. La prima serie è una differenza di serie geometriche. Infatti
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n+1} - 5^n}{7^n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n . \tag{1}$$
In entrambi i casi la ragione è minore di uno, per cui la serie originale è convergente e la sua somma risulta essere
$$S = 2\left(\frac{1}{1-\frac{4}{7}} - 1\right) - \left(\frac{1}{1-\frac{5}{7}} - 1\right) = \frac{1}{6}. \tag{2}$$
La seconda serie non è a termini postivi. Consideriamo la serie dei moduli per il cui termine generale vale la seguente disuguaglianza
$$\left|\sin(n)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \underbrace{=}_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{3}$$
Questo significa che la serie dei moduli è maggiorata dalla
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
che è convergente essendo il suo termine generale asintotico a $\frac{1}{n^2}$ dal momento che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$
In conclusione, la serie dei moduli converge per confronto e la serie inziale converge assolutamente.
La terza serie converge per il criterio di Leibniz poichè la successione di termine generale $\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ è infinitesima e decrescente.

2. Il dominio di f è individuato dal sistema
$$\begin{cases} y + e^x \geq 0 \\ x^2 - y > 0 \end{cases}, \tag{4}$$
per cui
$$\mathrm{dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -e^x \wedge y < x^2\right\}.$$

3. Le derivate parziali prime della funzione g sono

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y\left(1 - \frac{x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = x\left(1 - \frac{y}{4}\right)e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}}. \tag{5}$$

Cerchiamo i punti critici risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y\left(1 - \frac{x}{3}\right) = 0 \\ x\left(1 - \frac{x}{4}\right) = 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Troviamo facilmente le due soluzioni $O\,(0,0)$ e $A\,(3,4)$.
Le derivate parziali seconde sono

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{y}{3}\left(2 - \frac{x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{x}{4}\left(2 - \frac{y}{4}\right)e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \left(1 - \frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{y}{4}\right)e^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}}. \tag{7}$$

A questo punto possiamo costruire la matrice hessiana nei punti O e A. Abbiamo

$$\mathbb{H}(O) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \det\mathbb{H}(O) = -1 < 0 \longrightarrow O \text{ punto di sella}$$

$$\mathbb{H}(A) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}e^{-2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4}e^{-2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \det\mathbb{H}(A) = e^{-4} > 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(A) = -\frac{4}{3}e^{-2} < 0 \end{cases} \longrightarrow A \text{ punto di massimo}$$

La g è differenziabile in $P(0,1)$ poichè le due derivate parziali prime sono ivi continue. L'equazione del piano π è

$$\pi : z = g(0,1) + \frac{\partial g}{\partial x}(0,1)x + \frac{\partial g}{\partial y}(0,1)(y-1) \rightarrow \pi : z = e^{-\frac{1}{4}}x. \tag{8}$$

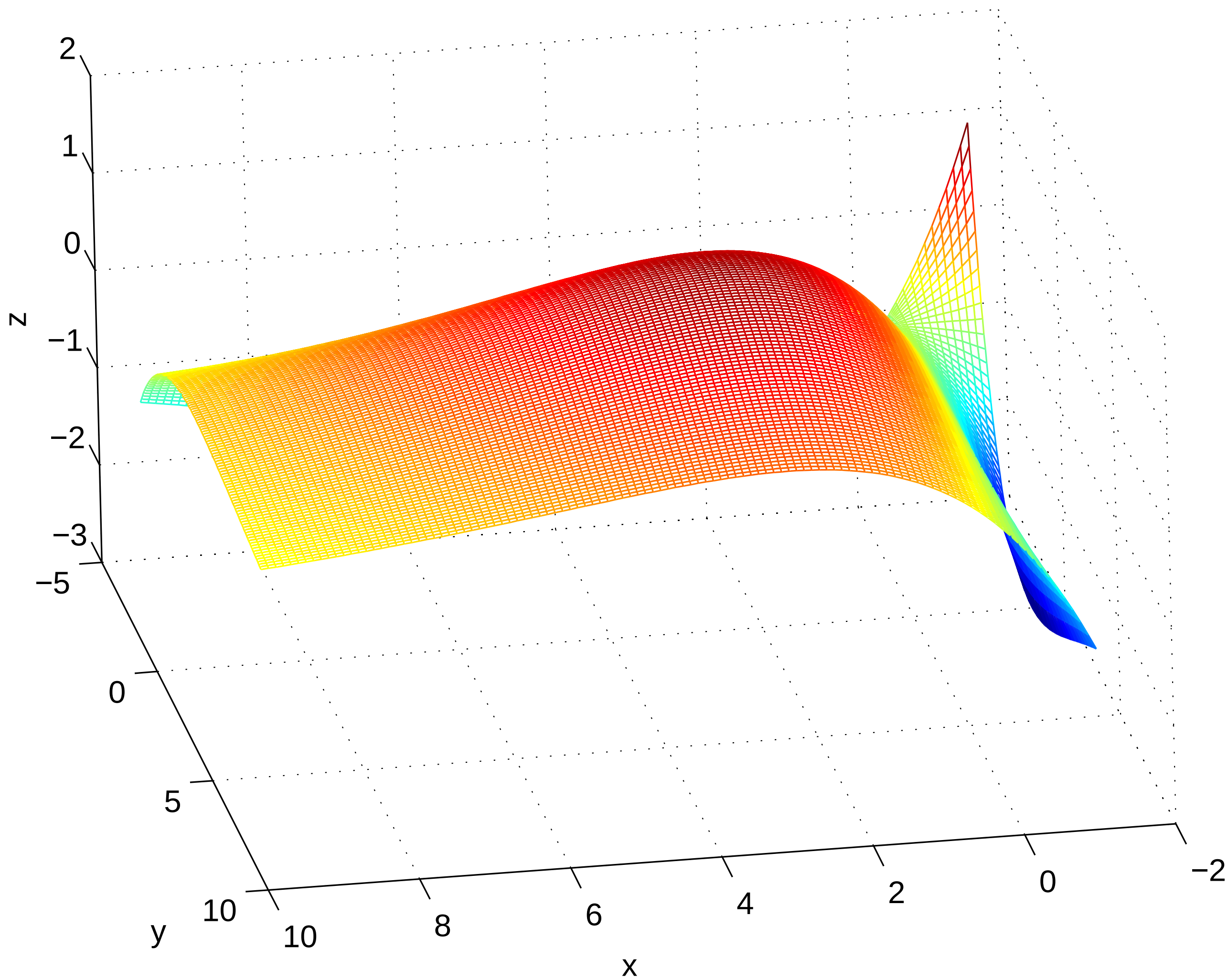

Figura 1: grafico di $g(x, y) = xye^{-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}}$.

4. Riscriviamo la funzione integranda nel modo seguente

$$\frac{\alpha x}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1} = \frac{(2\alpha-1)x^2 + \alpha x - 1}{(x^2+1)(2x+1)};$$

affinchè vi sia convergenza deve essere nullo il coefficiente del termine di secondo grado a numeratore, da cui $\alpha = 1/2$.
A questo punto abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx = \\
&\quad = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \left(\frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \int_2^t \frac{x}{x^2+1} dx - \int_2^t \frac{1}{2x+1} dx \right) = \\
&\quad = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{4} [\log(x^2+1)]_2^t - \frac{1}{2} [\log|2x+1|]_2^t \right) = \\
&\quad = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{4} \log(t^2+1) - \frac{1}{4} \log 5 - \frac{1}{2} \log|2t+1| + \frac{1}{2} \log 5 \right] = \\
&\quad = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{4} \log\left(\frac{t^2+1}{4t^2+4t+1} \right) + \frac{1}{4} \log 5 \right] = \frac{1}{4} \log \frac{5}{4}. \qquad (9)
\end{aligned}$$