PROVA SCRITTA DI CALCOLO II. 3 aprile 2006.

....

Cognome e nome   firma   Corso di laurea

1. Discutere la convergenza delle seguenti serie e, se possibile, calcolarne la somma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+1}+1}{5^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}.$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + \log(y^2-x^2),$$

e rappresentarlo graficamente.

3. Sia data la funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x,y) = xye^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}.$$

- Classificare i punti critici di g.
- Dopo aver verificato che g è differenziabile in $P(1,0)$, scrivere l'equazione cartesiana del piano π tangente al grafico della funzione in P.

4. Per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \left(\frac{\alpha x}{x^2+1} - \frac{1}{3x+1}\right) dx$$

converge. Determinare α e calcolare l'integrale.

SOLUZIONE.

1. La prima serie è una somma di serie geometriche. Infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+1}+1}{5^n} = 3\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n. \tag{1}$$

In entrambi i casi la ragione è minore di uno, per cui la serie originale è convergente e la sua somma risulta essere

$$S = 3\left(\frac{1}{1-\frac{3}{5}}-1\right) + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}-1\right) = \frac{19}{4}. \tag{2}$$

La seconda serie non è a termini postivi. Consideriamo la serie dei moduli per il cui termine generale vale la disuguaglianza

$$\left|\cos(n)\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \le \left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \underbrace{=}_{n\ge 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{3}$$

Questo significa che la serie dei moduli è maggiorata dalla

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

che è convergente essendo il suo termine generale asintotico a $\frac{1}{n^2}$ dal momento che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

In conclusione, la serie dei moduli converge per confronto e la serie inziale converge assolutamente.
La terza serie converge per il criterio di Leibniz poichè la successione di termine generale $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ è infinitesima e decrescente.

2. Il dominio di f è individuato dal sistema

$$\begin{cases} 1-x^2-y^2 \ge 0 \\ y^2-x^2 > 0 \end{cases}, \tag{4}$$

per cui

$$\text{dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y^2 - x^2 > 0\right\}.$$

3. Le derivate parziali prime della funzione g sono

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y\left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = x\left(1 - \frac{y}{3}\right)e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}. \tag{5}$$

Cerchiamo i punti critici risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 0 \\ x\left(1 - \frac{y}{3}\right) = 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Troviamo facilmente le due soluzioni $O\,(0,0)$ e $A\,(2,3)$.
Le derivate parziali seconde sono

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{y}{2}\left(2 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{x}{3}\left(2 - \frac{y}{3}\right)e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{y}{3}\right)e^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}. \tag{7}$$

A questo punto possiamo costruire la matrice hessiana nei punti O e A. Abbiamo

$$\mathbb{H}(O) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \det\mathbb{H}(O) = -1 < 0 \longrightarrow O \text{ punto di sella}$$

$$\mathbb{H}(A) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}e^{-2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}e^{-2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \det\mathbb{H}(A) = e^{-4} > 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(A) = -\frac{3}{2}e^{-2} < 0 \end{cases} \longrightarrow A \text{ punto di massimo}$$

La g è differenziabile in $P(1,0)$ poichè le due derivate parziali prime sono ivi continue. L'equazione del piano π è

$$\pi : z = g(1,0) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)y \rightarrow \pi : z = e^{-\frac{1}{2}}y. \tag{8}$$

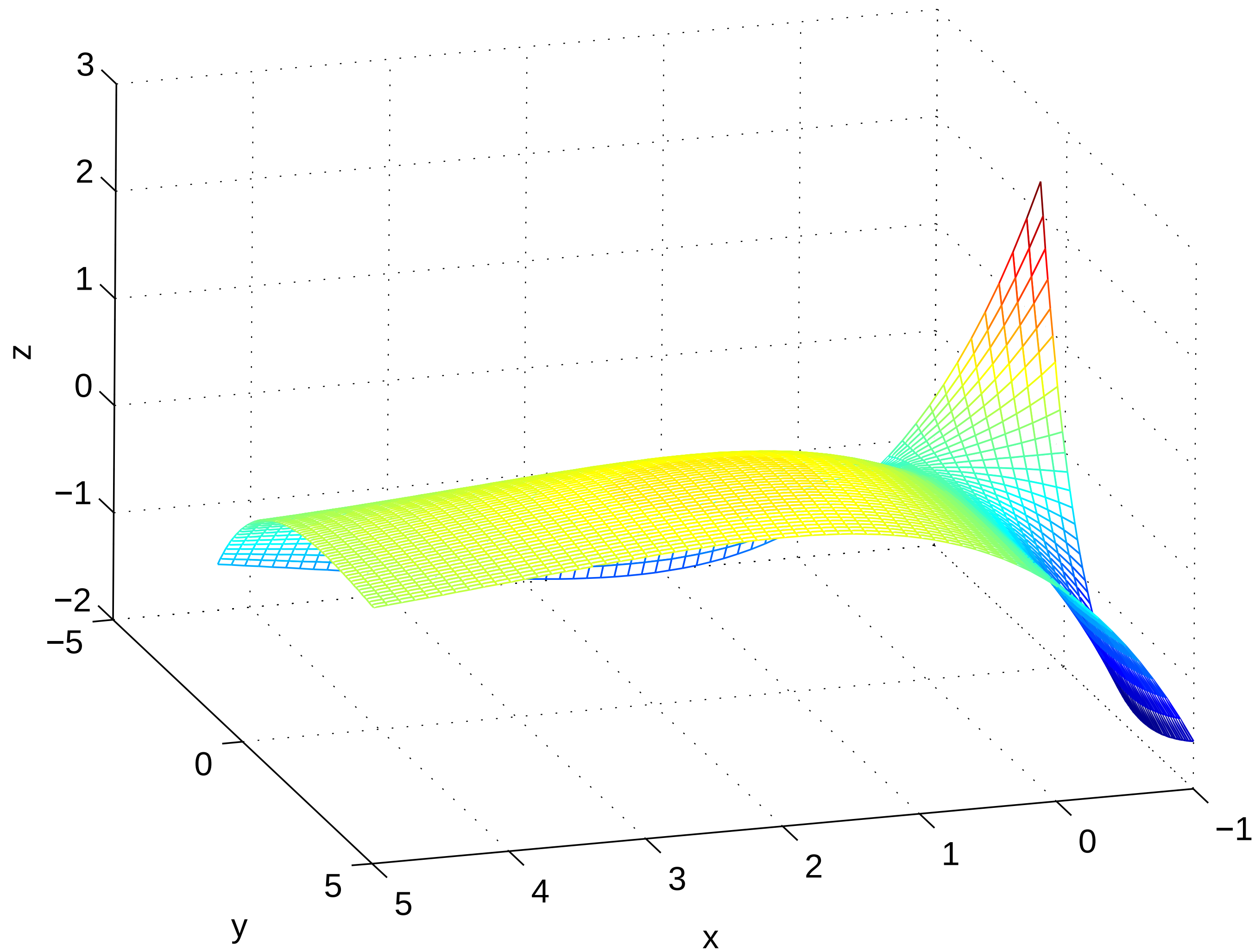

Figura 1: grafico di $g(x,y) = xye^{-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}$.

4. Riscriviamo la funzione integranda nel modo seguente

$$\frac{\alpha x}{x^2+1} - \frac{1}{3x+1} = \frac{(3\alpha-1)x^2+\alpha x-1}{(x^2+1)(3x+1)};$$

affinchè vi sia convergenza deve essere nullo il coefficiente del termine di secondo grado a numeratore, da cui $\alpha = 1/3$.
A questo punto abbiamo

$$\begin{aligned}
&\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{3x+1}\right) dx = \\
&\quad = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \left(\frac{1}{3}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{3x+1}\right) dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\int_2^t \frac{x}{x^2+1}dx - \int_2^t \frac{1}{3x+1}dx\right) = \\
&\quad = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{6}[\log(x^2+1)]_2^t - \frac{1}{3}[\log|3x+1|]_2^t\right) = \\
&\quad = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{6}\log(t^2+1) - \frac{1}{6}\log 5 - \frac{1}{3}\log|3t+1| + \frac{1}{3}\log 7\right] = \\
&\quad = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{6}\log\left(\frac{t^2+1}{9t^2+6t+1}\right) + \frac{1}{6}\log\frac{49}{5}\right] = \frac{1}{6}\log\frac{49}{45}. \qquad (9)
\end{aligned}$$