....

Cognome e nome matricola Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica II CALCOLO 2A 28 giugno 2006

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Dire se convergono le seguenti serie e, in caso affermativo, calcolarne la somma:

(A) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}}$; (B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sin 1)^n}{n!}$.

SOLUZIONE.

(A) Si tratta di una serie geometrica di ragione $3/4$, quindi convergente: la somma vale

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 - \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-3/4} - 1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}\,.$$

(B) Si tratta di una serie esponenziale, quindi convergente: la somma vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sin 1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\sin 1)^n}{n!} - 1 = e^{-\sin 1} - 1.$$

---

2. Per ciascuna delle due serie seguenti, determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la serie converga.

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n^2} - 1}{n^\alpha}$; (B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

SOLUZIONE. In base al criterio del confronto asintotico, se nei due casi il termine generale della serie è asintotico al termine generale di una serie convergente (rispettivamente, divergente), allora converge (rispettivamente, diverge) anche la serie data.

(A) Poiché $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, il termine generale della serie è asintotico a $1/n^{2+\alpha}$, quindi la serie converge se e solo se $2 + \alpha > 1$, ossia $\alpha > -1$.

(B) Poiché $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, il termine generale della serie è asintotico a $1/2n^{2\alpha}$, quindi la serie converge se e solo se $2\alpha > 1$, ossia $\alpha > 1/2$.

---

3. Si consideri la funzione $\displaystyle f(x,y) = \frac{\log(y - |x|)}{\sin y}$.

(A) Si determini il dominio di f e lo si rappresenti graficamente. Si dica se è aperto, chiuso, compatto, connesso, limitato.

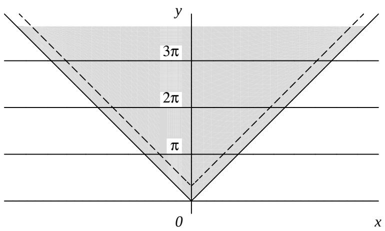
(B) Si disegni l'insieme di livello 0 di f.

(C) Si dica se F è differenziabile nel punto $(1,2)$ e, in caso affermativo, si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f in tale punto.

(D) Si calcoli la derivata direzionale di f in $(1,2)$ rispetto al generico versore (v_1, v_2). Rispetto a quale versore tale derivata direzionale è nulla?

SOLUZIONE.

(A) Il dominio D di f è costituito dall'insieme dei punti (x,y) di $\mathbf{R}^2$ tali che $y > |x|$ e $y \neq k\pi$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Il dominio D è rappresentato dalla zona grigia nella figura (il bordo e le rette parallele all'asse x non sono compresi): si tratta di un insieme aperto, sconnesso e illimitato.



(B) L'insieme di livello 0 è costituito da tutti e soli i punti $(x, y) \in D$ tali che $\log(y - |x|) = 0$, da cui $y - |x| = 1$, quindi $y = |x| + 1$: si tratta della linea tratteggiata in figura.

(C) In un intorno di $(1, 2)$ la funzione f è di classe $\mathbf{C}^1$, quindi f è differenziabile in $(1, 2)$. Per determinare l'equazione del piano tangente occorre calcolare le due derivate parziali in $(1, 2)$: poiché, per $(x, y) \in D$ con $x > 0$ si ha

$$f_x(x, y) = -\frac{1}{(y - x)\sin y}\,, \qquad f_y(x, y) = \frac{1}{(y - x)\sin y} - \log(y - x)\,\frac{\cos y}{\sin^2 y}\,,$$

si trova $f_y(1, 2) = -f_x(1, 2) = 1/(\sin 2)$: osservato che $f(1, 2) = 0$, il piano tangente al grafico in $(1, 2, 0)$ ha equazione $z = [1/(\sin 2)](-x + y - 1)$.

(D) Poiché f è differenziabile in $(1, 2)$, la derivata direzionale rispetto al generico versore $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ è data da

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1, 2) = f_x(1, 2)v_1 + f_y(1, 2)v_2 = \frac{1}{\sin 2}(-v_1 + v_2)\,:$$

in particolare, la derivata direzionale è nulla se e solo se $v_1 = v_2$, ossia lungo la direzione della bisettrice del primo quadrante.