....

Cognome e nome | matricola | Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica II | CALCOLO 2A | 19 luglio 2006

Istruzioni. 1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Dire se convergono le seguenti serie e, in caso affermativo, calcolarne la somma:

(A) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}+4^{n+1}+1}{5^n}$; (B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)}$.

SOLUZIONE.

(A) Si tratta della somma di tre serie geometriche di ragione rispettivamente $2/5$, $4/5$ e $1/5$: ciascuna di esse converge, poiché ha ragione minore di 1, quindi converge anche la serie data; la somma vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}+4^{n+1}+1}{5^n} = 4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n + 4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n == 4\frac{1}{1-2/5} + 4\frac{1}{1-4/5} + \frac{1}{1-1/5} = \frac{335}{12} .$$

(B) Si tratta di una serie telescopica, in quanto il termine generale si può scrivere come segue

$$\frac{2}{n(n+2)} = \frac{2+n-n}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} ,$$

dunque come differenza $b_n - b_{n+1}$, dove $b_n = 1/n \ + \ 1/(n+1)$. Poiché b_n tende a 0 per $n \to +\infty$, la serie data converge e la sua somma vale b_1, ossia $1 + 1/2 = 3/2$.

---

2. Dire se converge l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-x}\, dx.$

SOLUZIONE. In base al criterio del confronto asintotico, se il valore assoluto dell'integrando è asintotico ad una funzione integrabile in senso improprio, allora converge anche l'integrale dato. Poiché per $x > 2$ si ha $\left|\dfrac{\cos x}{x^2-x}\right| \le \dfrac{1}{x^2-x}$ e quest'ultimo è asintotico a $1/x^2$, si deduce che l'integrale assegnato converge (assolutamente).

---

3. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione $f_\alpha(x,y) = \sqrt{e^{x^2+y^2} - \alpha}$.

(A) Si determini il dominio di f_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si dica se è aperto, chiuso, compatto, connesso, limitato.

(B) Si disegni il dominio di f_0, f_1 e f_e e, se possibile, l'insieme di livello 0.

SOLUZIONE.

(A) Il dominio D_α di f_α è costituito dall'insieme dei punti (x,y) di $\mathbf{R}^2$ tali che $e^{x^2+y^2} \ge \alpha$: in particolare, si ottiene $D_\alpha = \mathbf{R}^2$ se $\alpha/le1$, mentre D_α è il complementare del cerchio aperto di centro l'origine e raggio $\sqrt{\log\alpha}$ se $\alpha > 1$. In particolare, si tratta in ogni caso di un insieme chiuso, connesso e illimitato (se $\alpha \le 1$, allora il dominio è anche aperto).

(B) L'insieme di livello 0 è: a) vuoto, se $\alpha = 0$; b) ridotto all'origine, se $\alpha = 1$; c) dato dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1, se $\alpha = e$.

---

4. E' data la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2 y$.

(A) Determinare i punti di massimo e minimo relativi.

(B) Dire se esistono il massimo e il minimo assoluto di f nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 4\}$ e, in caso affermativo, calcolarli.

SOLUZIONE.

(A) La funzione f è un polinomio, quindi di classe $\mathbf{C}^k$ in $\mathbf{R}^2$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Le sue derivate parziali sono date da:

$$f_x(x,y) = 2x(1-y), \qquad f_y(x,y) = 2y - x^2, \qquad f_{xx}(x,y) = 2 - 2y, \qquad f_{yy}(x,y) = 2, \qquad f_{xy}(x,y) = -2x.$$

Pertanto i punti critici sono $P_0 = (0,0)$, $P_+ = (\sqrt{2},1)$ e $P_- = (-\sqrt{2},1)$, con matrice hessiana

$$M(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M(P_+) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, \qquad M(P_-) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} :$$

la prima è definita positiva, le altre due sono indefinite. Pertanto, P_0 è un punto di minimo relativo mentre P_+ e P_- sono punti sella.

(B) La restrizione di f all'insieme $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$ deve avere sia massimo che minimo assoluto per il teorema di Weierstrass. Sappiamo che in $(0,0)$ vi è un punto di minimo relativo e che gli altri punti stazionari interni non sono di massimo né di minimo: pertanto, occorre esaminare i valori assunti dalla restrizione di f alla circonferenza $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 4\}$. Questa è data dalla funzione $g(y) = 4 - (4 - y^2)y$, ossia $g(y) = 4 - 4y + y^3$, con $y \in [-2,2]$. Si verifica facilmente che la funzione g è crescente in $]-2, -2/\sqrt{3}[$ e in $]2/\sqrt{3}, 2[$, decrescente in $]-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}[$. Pertanto, g assume un minimo locale per $y = -2$ (da cui $x^2 = 4 - y^2 = 0$, quindi $x = 0$) e per $y = 2/\sqrt{3}$ (da cui $x^2 = 4 - y^2 = 8/3$, quindi $x = \pm 2\sqrt{2}/\sqrt{3}$) e un massimo locale per $y = -2/\sqrt{3}$ (da cui $x^2 = 4 - y^2 = 8/3$, quindi $x = \pm 2\sqrt{2}/\sqrt{3}$) e per $y = 2$ (da cui $x^2 = 4 - y^2 = 0$, quindi $x = 0$). Pertanto, i valori da confrontare sono i seguenti:

$$f(0,0), \qquad f(0,-2), \qquad f(0,2), \qquad f(\pm 2\sqrt{2}/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}), \qquad f(\pm 2\sqrt{2}/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}) :$$

il primo è nullo, il secondo e il terzo sono uguali a 4, il quarto vale $(12\sqrt{3} - 16)/3\sqrt{3}$ (che è di poco inferiore a 1) e il quinto vale $(12\sqrt{3} + 16)/3\sqrt{3}$ (che è superiore a 7). Si conclude che il valore minimo assoluto dalla restrizione di f all'insieme $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4\}$ è 0, mentre il valore massimo assoluto è $(12\sqrt{3} + 16)/3\sqrt{3}$.