. . . .

Cognome e nome | matricola | Corso di Laurea (FIS, MAT, NTF)

Analisi Matematica II | CALCOLO 2A | 13 settembre 2006

Istruzioni.
1. Compilare la parte soprastante, scrivendo in STAMPATELLO sopra la riga punteggiata.
2. Consegnare ANCHE questo foglio.
3. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori.
4. Tempo a disposizione: 120 min.

---

1. Dire se convergono le seguenti serie e, in caso affermativo, calcolarne la somma:

(A) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} e^{-n}$; (B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+2)}$.

SOLUZIONE.

(A) Si tratta di una serie geometrica di ragione $1/e$, convergente poiché la ragione è minore di 1; la somma vale

$$\sum_{n=3}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} - \left[1 + \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{e}\right)^2\right] = \frac{e}{e-1} - \left[1 + \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{e}\right)^2\right].$$

(B) Si tratta di una serie telescopica, in quanto il termine generale si può scrivere come segue

$$\frac{1}{n(2n+2)} = \frac{1}{2}\frac{1+n-n}{n(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

dunque come metà della differenza $b_n - b_{n+1}$, dove $b_n = 1/n$. Poiché b_n tende a 0 per $n \to +\infty$, la serie data converge e la sua somma vale $b_1/2$, ossia $1/2$.

---

2. (A) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)^{5\alpha}}{(x-1)^{\alpha}}\, dx$.

(B) Dire se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$.

SOLUZIONE.

(A) Occorre discutere il comportamento della funzione integranda per $x \to 1^+$ e per $x \to +\infty$. Anzitutto, se $\alpha \le 0$ allora l'integrando è prolungabile per continuità in 1, dunque la funzione è integrabile in un intorno destro di 1. Se $\alpha > 0$, allora per $x \to 1^+$ la funzione integranda è asintotica a $2^{5\alpha}/(1-x)^{\alpha}$, pertanto è integrabile in senso improprio in un intorno destro di 1 se e solo se $0 < \alpha < 1$. Per quanto riguarda il comportamento per $x \to +\infty$, si ha

$$\frac{(x+1)^{5\alpha}}{(x-1)^{\alpha}} = \frac{[x(1+1/x)]^{5\alpha}}{[x(1-1/x)]^{\alpha}} = x^{4\alpha}\frac{(1+1/x)^{5\alpha}}{(1-1/x)^{\alpha}} :$$

poiché l'ultima frazione è limitata per $x \to +\infty$, la condizione necessaria e sufficiente affinché converga l'integrale improprio, ad esempio in $[2, +\infty[$, è che $4\alpha < -1$, ossia $\alpha < -1/4$. Si noti che se α soddisfa l'ultima disuguaglianza, allora la funzione è integrabile in un intorno destro di 1, quindi l'integrale improprio assegnato è convergente se e solo se $\alpha < -1/4$.

(B) La successione $a_n = n/(1+n^2)$ è infinitesima (ovvio) e decrescente, infatti la disuguaglianza $a_n > a_{n+1}$ equivale a

$$\frac{n}{1+n^2} > \frac{n+1}{1+(n+1)^2}, \quad \text{ossia} \quad n[1+(n+1)^2] > (n+1)(1+n^2) \quad \text{cioè} \quad n(n+1) > 1,$$

disuguaglianza vera per ogni $n \ge 1$. Pertanto, la serie data converge per il criterio di Leibniz.

---

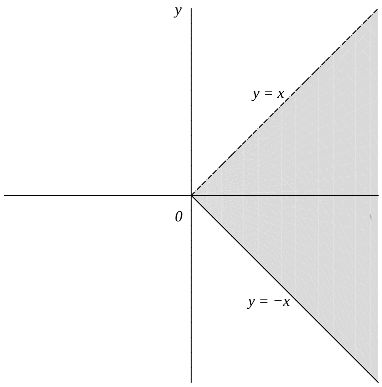
3. Si consideri la funzione di due variabili reali $f(x,y) = \log(x-y)\sqrt{x+y}$.

(A) Si determini il dominio di f e lo si rappresenti nel piano. Si dica se è aperto, chiuso, compatto, connesso, limitato.

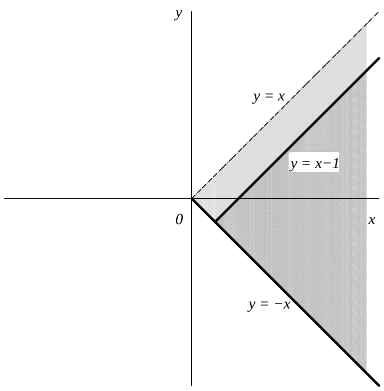
(B) Si determini l'insieme di livello 0 di f e lo si rappresenti nel piano. Si determinino gli insiemi
$N = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ f(x,y) < 0\}$ e $P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ f(x,y) > 0\}$
e li si rappresenti nel piano.

(C) Si calcolino tutte le derivate direzionali di f rispetto al generico versore (v_1, v_2) nel punto $(0,1)$.

SOLUZIONE.



(A) Le condizioni da imporre sono: $x - y > 0$ e $x + y \geq 0$, da cui $-x \leq y < x$. Il dominio D è rappresentato nella figura a lato (zona grigia): la bisettrice del quarto quadrante (tratto continuo),esclusa l'origine, appartiene all'insieme, la bisettrice del primo quadrante (linea tratteggiata),compresa l'origine, appartiene al complementare.
D non è né aperto né chiuso (in quanto contiene solo una parte del bordo), inoltre non è limitato, quindi non è compatto, infine D è connesso poiché è connesso per archi.



(B) L'insieme di annullamento di f è costituito da $\{(x, y) \in D : \ y = x - 1\} \cup \{(x, y) \in D : \ y = -x \text{ e } x \neq 0\}$ (si tratta delle due semirette rappresentate con tratto più marcato nella figura a lato). Inoltre, $N = \{(x, y) \in D : \ y > x - 1\}$ e $P = \{(x, y) \in D : \ y < x - 1\}$: nella figura a lato, N e P sono rispettivamente la zona grigio chiaro e grigio scuro.

(C) La funzione f è differenziabile in $(0, 1)$, quindi la derivata direzionale di f in $(0, 1)$ rispetto alla direzione (v_1, v_2) è data da $f_x(0, 1)v_1 + f_y(0, 1)v_2$: poiché

$$f_x(x, y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x-y} + \frac{1}{2}\frac{\log(x-y)}{\sqrt{x+y}} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = \frac{\sqrt{x+y}}{y-x} + \frac{1}{2}\frac{\log(x-y)}{\sqrt{x+y}} ,$$

si ricava $f_x(0, 1) = -1$ e $f_y(0, 1) = 1$, quindi la derivata direzionale richiesta è $-v_1 + v_2$.

---

4. Si consideri la funzione $\qquad f(x, y) = x^3 + x^2 + 2xy$.

(A) Si determinino e si classifichino gli eventuali punti stazionari di f. Si dica se esistono massimi e minimi relativi di f in $\mathbf{R}^2$. In caso affermativo si determinino.

(B) Si dica se esistono il massimo e il minimo assoluto di f nell'insieme $[0, 1] \times [0, 1]$ e, in caso affermativo, si calcolino.

SOLUZIONE.

(A) La funzione f è un polinomio, quindi di classe $\mathbf{C}^k$ in $\mathbf{R}^2$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Le sue derivate parziali sono date da:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2x + 2y, \qquad f_y(x, y) = 2x, \qquad f_{xx}(x, y) = 6x + 2, \qquad f_{yy}(x, y) = 0, \qquad f_{xy}(x, y) = 2.$$

Pertanto l'unico punto critico è $(0, 0)$, con matrice hessiana

$$M(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

che è indefinita. Pertanto, $(0, 0)$ è un punto sella.

(B) La restrizione di f all'insieme $[0, 1] \times [0, 1]$ deve avere sia massimo che minimo assoluto per il teorema di Weierstrass. Sappiamo che l'unico punto stazionario interno non è di massimo né di minimo: pertanto, occorre esaminare i valori assunti dalla restrizione di f al contorno del quadrato. Le restrizioni ai quattro lati sono rispettivamente

$$f\Big|_{\{(x,0):\ 0 \leq x \leq 1\}} = x^3 + x^2, \quad f\Big|_{\{(1,y):\ 0 \leq y \leq 1\}} = 2 + 2y,$$
$$f\Big|_{\{(x,1):\ 0 \leq x \leq 1\}} = x^3 + x^2 + 2x, \quad f\Big|_{\{(0,y):\ 0 \leq y \leq 1\}} = 0,$$

pertanto, il valore minimo di queste restrizioni è 0 e il valore massimo è 4: questi sono evidentemente anche il valore minimo e il valore massimo di f nel quadrato.